

КОПБАЛИНА САЛТАНАТ СЕРИКОВНА

**Жойылатын воронка тәрізді облыста жылу өткізгіштіктің шеттік
есептерін шешу**

8D05401 – Математика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесшілер
физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор
Рамазанов М.И.

физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор
Дженалиев М.Т.

Шетелдік ғылыми кеңесші
физика-математика ғылымдарының докторы,
профессор
Псху А.В.
(Ресей)

МАЗМҰНЫ

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР	3
КІРІСПЕ	4
1 БҰРЫШТЫҚ ЖОЙЫЛАТЫН ОБЛЫСТАҒЫ МОДЕЛЬДІК ЕКІ ӨЛШЕМДІ ПАРАБОЛАЛЫҚ ЕСЕП	26
1.1 Есептің қойылымы.....	26
1.2 (1.1.3)-(1.1.5) шеттік есептің шешімін жылу потенциалдарының көмегімен беру.....	29
1.3 (1.1.3)-(1.1.5) шеттік есепті Вольтерр типті сингулярлық интегралдық теңдеуге келтіру.....	32
1.4 Сипаттамалық интегралдық теңдеуді шешу.....	38
1.5 Біртекті сипаттамалық теңдеуді шешу.....	40
1.6 Біртектісіз сипаттамалық интегралдық теңдеуді шешу. Резольвентаны құру.....	43
1.7 Сипаттамалық теңдеуді шешу.....	46
1.8 Бастапқы интегралдық теңдеуді шешу. Карлеман-Векуа регуляризация әдісі.....	47
1.9 (1.1.3)-(1.1.5) шеттік есептің шешімі.....	49
2 УАҚЫТТЫҢ БАСТАПҚЫ СӘТІНДЕ НҮКТЕГЕ ДЕЙІН ЖОЙЫЛАТЫН КАНОНДЫҚ ЕМЕС ОБЛЫСТАҒЫ ПАРАБОЛАЛЫҚ ЕСЕП	52
2.1 Есептің қойылымы.....	52
2.2 (2.1.3)-(2.1.5) шеттік есептің шешімін жылу потенциалдарының көмегімен беру.....	55
2.3 (2.1.3)-(2.1.5) шеттік есепті Вольтерр типті сингулярлық интегралдық теңдеуге түрлендіру.....	58
2.4 (2.3.2) сингулярлық интегралдық теңдеудің ерекшеліктері туралы.....	63
2.5 Сипаттамалық сингулярлық интегралдық теңдеу.....	69
2.6 Сипаттамалық теңдеуді шешу.....	74
2.7 Сипаттамалық теңдеудің шешімімен (2.4.1) интегралдық теңдеуді регуляризациялау.....	76
2.7.1 Реттелген теңдеудің резольвентасы мен ядросын бағалау.....	77
2.8 (2.1.3)-(2.1.5) шеттік есептің шешімі.....	80
ҚОРЫТЫНДЫ	86
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ	87

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

\mathbb{R}^n	– n -өлшемді кеңістік, $\mathbb{R}^n = \{-\infty < x_k < \infty; k = 1, 2, \dots, n\}$
\mathbb{C}	– комплекс сандар жиыны
G	– Грин функциясы
$\text{Im}[A]$	– A комплекс өлшемінің жалған бөлігі
$\text{Re}[A]$	– A комплекс өлшемінің нақты бөлігі
r, φ	– полярлық координаталар, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
x, y	– кеңістік айнымалылар
t	– уақытша айнымалы ($t \geq 0$)
$u(x, t)$	– ізделініп отырған функция, математикалық физика теңдеуінің (есемінің) шешуі
$L_2(\Omega)$	– Ω облысында квадратта қосылатын функциялар кеңістігі (кластар)
$L_\infty(\Omega)$	– Ω облысында айтарлықтай шектеулі функциялар кеңістігі (кластар)
$C(\Omega)$	– Ω облысында үздіксіз функциялар кеңістігі
$M(\Omega)$	– $M(\Omega) = L_\infty(\Omega) \cap C(\Omega)$
$f \doteq F$	– Лаплас түрлендіруінің f функция-түпнұсқасы және оның бейнесі $F, f(t) \doteq F(p) = L[f(t)] = \hat{f}(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$
$\Gamma(z)$	– Эйлердің гамма-функциясы
$B(x, y)$	– Бета-функция
$\text{erf } z$	– ықтималдылықтар аралығы, $\text{erf } z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-x^2) dx$
$\text{erfc } z$	– ықтималдылықтардың қосымша интегралы, $\text{erfc } z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \exp(-x^2) dx$
$\text{Ei}(z)$	– интегралдық көрсеткіштік функция
$J_\nu(z)$	– I текті цилиндрлік функция (функция Бесселя)
$N_\nu(z)$	– II текті цилиндрлік функция (функция Неймана)
$H_\nu^{(1)}(z)$	– I текті Ганкель функциясы
$H_\nu^{(2)}(z)$	– II текті Ганкель функциясы;
$I_\nu(z)$	– I текті Бесселдің модифицирленген функциясы
$K_\nu(z)$	– II текті Бесселдің модифицирленген функциясы (Макдональд функциясы)
$I_{\nu-1, \nu}(z)$	– $(\nu - 1)$ және ν дәрежедегі I текті Бесселдің модифицирленген функциясы мәндерінің айырымы, $I_{\nu-1, \nu}(z) = I_{\nu-1}(z) - I_\nu(z)$

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы.

Диссертацияда жойылатын воронка тәрізді облыста жылу өткізгіштің шеттік есептері қарастырылады. Бұл есептердің ерекшелігі – шекаралық шарттардың жылжымалы шекарада берілетіндігінде. Бұл факт айнымалыларды бөлу, интегралдық түрлендіру және басқа да белгілі классикалық әдістерді қолдануға мүмкіндік бермейді.

Диссертациялық жұмыста жалпыланған жылу потенциалдары түріндегі есептер шешімдерінің интегралды көріністері алынды, олар зерттелетін есептерді сәйкес арнайы (сингулярлық) интегралдық теңдеулердің шешіміне келтіруге мүмкіндік берді. Қарастырылған шеттік есептерді Вольтерр типті сингулярлық интегралдық теңдеуге келтіру сұрақтары зерттелген. Интегралдық теңдеулерге сәйкес келетін сипаттамалық теңдеулер құрылып, олардың шешілу сұрақтарын зерттеу үшін резольвентасы мен ядросына бағалау жүргізілген. Ал сәйкес бастапқы интегралдық теңдеулер эквивалентті регуляризация әдісі – Карлеман-Векуа әдісімен шешілді. Екінші типтегі Вольтерр сингулярлық интегралдық теңдеулерінің шешімдерін және шешімдердің құрастырылған интегралдық көріністерін қолдана отырып, бастапқы шеттік есептердің шешімдері алынды.

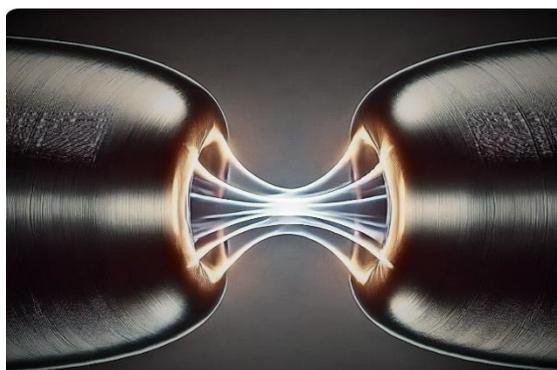
Зерттеу жұмысының өзектілігі.

Уақытқа байланысты қозғалмалы шекаралары бар аймақтардағы әртүрлі типтегі теңдеулерге арналған бастапқы шеттік есептер теориясындағы алғашқы нәтижелер М. Gevrey [1], А. Browne [2], Е. Holmgren [3], И.Г. Петровский [4] авторларының жұмыстарында жарияланған. Бұл жұмыстарда уақытқа байланысты өзгеретін шекаралары бар облыстардағы кеңістіктік айнымалы бойынша әртүрлі бір өлшемді аралас параболалық есептердің шешілу мәселелері зерттелінген. В.Ш. Михайлов [5, 6], С.Г. Крейн және Г.И. Лаптев [7], В.И. Ушаков [8], Р.Д. Алиев [9-11], В.В. Курт және А.Е. Шишков [12, 13], М.О. Орынбасаров [14], Ю.А. Алхутов [15], Э.М. Карташов [16, 17], Dal Passo R., Ughi M. [18] және басқа математиктер цилиндрлік емес облыстардағы параболалық теңдеулер үшін бастапқы шеттік есептерді одан әрі дамытты. Сондай-ақ, қозғалмалы шекарасы бар жылу өткізгіштік есептері Л.И. Камынин [19-21], В.Ш. Михайлов [22, 23], М.Я. Антимирова, З.И. Геллер [24], М.И. Дубовис [25], Д.В. Редозубов [26], Г.А. Гринберг [27, 28], В.И. Квалвассер, Я.Ф. Рутнер [29] жұмыстарында қарастырылған.

Соңғы уақытта заманауи контакт техникасының қарқынды дамуына және электр аппараттарының жоғары жылдамдықпен жұмыс істеуіне байланысты контакт жүйесінің температуралық өрісін неғұрлым сенімді өлшеу өзекті мәселеге айналып отыр. Сонымен қатар, оның уақытқа байланысты өзгеру динамикасын зерттеу де маңызды болып табылады. Бұл ретте, жоғары тоқты контакттерінің температуралық өрісін зерттеу кезінде контакт алаңының өлшемдерінің өзгеруін ескеру қажет, себебі бұл өзгерістер электродинамикалық

күштердің әсерінен және жоғары температураларда контакт материалының балқуына байланысты орын алады.

Электродтар ажыратылған кезде, контакт бетінде балқу температурасына дейін қызу жүреді және олардың арасында сұйық металл көпіршесі пайда болады. Ары қарай ажырату барысында бұл көпірше екі бөлікке бөлініп, бір электродтан екіншісіне контакт материалын тасымалдау жүзеге асады, яғни көпіршелі эрозия құбылысы орын алады (1-сурет). Бұл өз кезегінде электр құрылғыларының қалыпты жұмысын бұзуы мүмкін [30-35].



Сурет 1 – Контактілердің ажыратылуы

Көпіршенің жылуфизикалық қасиеттерін модельдей отырып, С.Н. Харин контактінің ажыратылуының бастапқы сәтінде шешім облысы болмайтын шеттік есепке келді [36]. Бұл шеттік есептің интегралдық теңдеуіне әсер етті. Интегралдық теңдеудің Пикар жуықтау тізбегі жинақталмайтын болып шықты. Математикалық тұрғыдан алғанда, қарастырылып отырған есептің ерекшелігі қозғалмалы шекараның болуы және уақыттың бастапқы сәтінде шешім облысының жойылуы. Бұл ерекшелік және оның зерттеуінің кейбір нәтижелері [37] жұмыста қарастырылған.

Мұндай түрдегі жылу есептерін шешу үшін жалпыланған жылу потенциалдарын қолдану және бастапқы шеттік есепті Вольтерр типті сингулярлық интегралдық теңдеуге келтіру қажет. Математикалық тұрғыдан алғанда, қарастырылып отырған есептердің ерекшелігі: біріншіден, шешімі ізделетін облыстың шекарасы қозғалыста болып табылады, екіншіден, бастапқы уақыт мезетінде контактілер жабық күйде болады және есепті шешу облысы нүктеге дейін жойылады [38-50].

Сондай-ақ, байланыс техникасын пайдалану көлемінің үнемі артуына байланысты байланыс материалдарының параметрлерін және олардың жұмыс режимдерін тиімді таңдау мәселелері өзекті болып табылады. Сондықтан электрлік контактілерде болатын жылуфизикалық процестерді зерттеу автоматикада, аспап жасауда, дәнекерлеу техникасында, электр жабдықтарында және байланыс элементтері негізгі құраушылардың бірі болып табылатын әртүрлі құрылғыларда өте маңызды [51-53]. Практикалық қосымшаларда да, теориялық тұрғыдан да уақыттың бастапқы сәтінде жойылатын облыстардағы жылу өткізгіштіктің шеттік есептері ерекше қызығушылық тудырады. Жалпы

жағдайда есептердің бұл түріне математикалық физиканың классикалық әдістері қолданылмайды, өйткені жылу өткізгіштік теңдеуінің шешімін жылуды тасымалдау облысы шекарасының қозғалысымен үйлестіру мүмкін емес. Сондықтан уақыттың бастапқы сәтінде жойылатын облыстардағы шеттік есептерді зерттеу мәселесі өзекті болып табылады. Диссертациялық зерттеуде жылжымалы шекаралық шарттары бар жойылатын облыстардағы жылу өткізгіштік теңдеулері үшін жаңа шекаралық есептер шешу қарастырылатын болады. Қарастырылып отырған есептердің ерекшеліктері екінші текті Вольтерр типіндегі сингулярлық интегралдық теңдеулердің шешілу мәселелерін зерттеуге әкеледі.

Мұндай сингулярлық интегралдық теңдеулер Е.И. Ким, С.Н. Харин, Ю.Р. Шпади, М.Ө. Өтелбаев, Т.Е. Омаров, А.А. Кавокин, М.Т. Дженалиев, Г.И. Бижанова, М.И. Рамазанов, У.К. Койлышов, С.П. Городничев, С.А. Искаков, М.Т. Космакова, Н.К. Гульманов, А.О. Танин және басқа авторлардың жұмыстарында зерттелінген. Белгілі бір үлес кеңістігіндегі интегралдық теңдеулердің осы түрінің бір мәнді шешілу мәселелері [54-58] жұмыстарында зерттелгенін атап өткен дұрыс, онда шешімдердің үлес функциясының теңдеудің оң жағындағы үлес функцияларына тәуелділігі табылды. Осыған ұқсас интегралдық теңдеулерді, атап айтқанда, сәйкес интегралдық операторлардың спектрлік мәселелерін зерттеу [59-65] жұмыстарда да жүргізілген.

Жұмыстың мақсаты. Зерттеудің негізгі мақсаты – уақыттың бастапқы сәтінде жойылатын облыстардағы жылжымалы шеттік шарттары бар жылу өткізгіштік теңдеулері үшін шеттік есептерді шешу мәселелері; екінші текті Вольтерр типіндегі сингулярлық интегралдық теңдеулерді шешуді зерттеу.

Зерттеу міндеттері:

– уақыттың бастапқы сәтінде жойылатын облыстағы екі өлшемді параболалық есепті шешу үшін жылжымалы шеттік шарттары бар жаңа шеттік есептің қойылымы;

– берілген функциялар және есептердің шешімдер кеңістігін сипаттау;

– бастапқы есептерді түрлендіру;

– шеттік есептерді Вольтерр типті сингулярлық интегралдық теңдеуге келтіру;

– сипаттамалық интегралдық теңдеулерін құрып, оларды шешу;

– резольвентасы мен ядросына бағалау жүргізіп, зерттеу;

– эквивалентті регуляризация әдісімен бастапқы интегралдық теңдеулерді шешу;

– бастапқы шеттік есептерді шешу.

Зерттеудің жалпы әдістері. Дербес туындылы теңдеулердің жалпы теориясының әдістері, дифференциалдық теңдеулердің жалпы теориясының және функционалдық талдаудың әдістері, Лаплас және Фурье интегралдық түрлендірулер әдістері, арнайы функциялар және комплекс айнымалылы функциялар қолданылады.

Ғылыми жаңалығы. Жұмыста уақыттың бастапқы сәтінде жойылатын облыстардағы екі өлшемді параболалық есепті шешу үшін жылжымалы шеттік шарттары бар жаңа шеттік есептердің қойылымы беріліп, оларды шешу жолдары зерттелінді.

Зерттеу жұмысының теориялық және практикалық маңыздылығы. Жұмыс барысында алынған нәтижелер теориялық сипатқа ие және уақытқа байланысты қозғалмалы шекаралары бар облыстардағы параболалық теңдеулер үшін шеттік есептер теориясының дамуына елеулі үлес қосады, сондай-ақ Вольтерр типті интегралдық теңдеулер теориясында да маңызды орын алады. Жұмыс жоғарғы оқу орындарында математика бойынша арнайы курстарды оқытуда қолданылуы мүмкін.

Қорғауға шығарылатын негізгі нәтижелер.

1) уақыттың бастапқы сәтінде жойылатын қозғалмалы шекаралары бар облыстардағы жылу өткізгіштік теңдеулері үшін шекаралық шарттары бар жаңа шеттік есептердің шешімі;

2) есептерді Вольтерр типті сингулярлық интегралдық теңдеуге түрлендіру;

3) сипаттамалық интегралдық теңдеулерді құру;

4) резольвентасын құру және ядросын бағалау;

5) бастапқы интегралдық теңдеулерді эквивалентті регуляризация әдісімен шешу;

6) берілген шеттік есептердің шешілу теоремалары.

Жүргізілген зерттеулердің дұрыстығы мен негізділігі. Жұмыста қолданылған әдістердің конструктивтілігі зерттеудің сенімділігі мен негізділігін қамтамасыз етеді. Жалпы тұжырымдар теоремалар түрінде құрылған және олардың дәлелдеулері берілген.

Жарияланымдар. Диссертацияның негізгі нәтижелері 10 жұмыста [66-75] жарияланды. Оның ішінде 3 мақала Web of Science Core Collection және Scopus базасына кіретін журналдарда, 7 тезис халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында.

1. Solution of a two-dimensional parabolic model problem in a degenerate angular domain // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2023. – №3(111). – P. 91-108 (Scopus, процентиль 53).

2. Solution of a Singular Integral Equation of Volterra Type of the Second Kind // Lobachevskii Journal of Mathematics – Kazan Federal University. – 2024. – Vol. 45. – P. 5898–5906 (Scopus, процентиль 57).

3. Solution of the model problem of heat conduction with Bessel operator // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2025. – №1(117). – P. 71-80 (Web of Science (ESCI Q2), Scopus, процентиль - 53).

Халықаралық конференциялар материалдарындағы жарияланымдар:

1. О Псевдо-Вольтерровом интегральном уравнении // Материалы международной научно-практической конференции «Тенденция развития современной математики и ее обучения в условиях цифровизации образования» (Шымкент, 2023. – С. 94-97).

2. К решению двумерной параболической задачи в вырождающейся области // Материалы международной научно-практической конференции «Анализ, дифференциальные уравнения и их приложения» посвященная 100-летию со дня рождения члена-корреспондента АН КазССР, доктора физико-математических наук, профессора Тулеубай Идрисовича Аманова (Астана, 2023. – С. 102-103).

3. Solution of a parabolic problem in an evolving degenerate domain // Abstracts of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023), (Turkestan, 2023. – P. 92).

4. Параболическое уравнение в неканонической вырождающейся области // Материалы VII международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2023. – С. 238).

5. Параболическая задача в области, вырождающейся в точку по закону $x = t^\alpha, \alpha > \frac{1}{2}$ // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки РК (Алматы, 2024. – С. 170-171).

6. Parabolic problem in a non-canonical domain degenerating to a point at the initial moment of time // Abstracts of the XI International conference «Modern problems of mathematics and mechanics» dedicated to the memory of a genius Azerbaijani scientist and thinker Nasiraddin Tusi (Baku, 2024. – P. 187-190).

7. Решение граничной задачи теплопроводности в неканонической вырождающейся области // Материалы международной научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» посвященной 90 летию со дня рождения академика Т.Д. Джураева (Ташкент, 2024. – С. 214).

Бірлескен авторлармен орындалған жұмыстарда әр бірлескен автордың үлесі тең.

Алынған нәтижелерді апробациялау. Диссертацияның негізгі нәтижелері келесі конференциялар мен семинарларда дәлелденді және талқыланды:

1. «Қазіргі математиканың даму тенденциясы және оны білім беруді цифрландыру жағдайында оқыту» атты халықаралық ғылыми-практикалық конференциясы (27-28 сәуір 2023 жыл, академик Ә. Қуатбеков атындағы Халықтар достығы университеті, Шымкент қ., Қазақстан Республикасы).

2. Қазақстан Ғылым академиясының корреспондент-мүшесі, ф.-м.ғ.д., профессор Т.И. Амановтың туғанына 100 жыл толуына арналған «Анализ, дифференциальные уравнения и их приложения» халықаралық ғылыми-практикалық конференциясы (22-23 маусым 2023 жыл, М.В. Ломоносов атындағы ММУ Қазақстандық филиалы, Астана қ., Қазақстан Республикасы).

3. Түркі әлемі математиктерінің VII Дүниежүзілік Конгресі (20-23 қыркүйек 2023 жыл, Түркістан қ., Қазақстан Республикасы).

4. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» VII халықаралық ғылыми

конференциясы (4-8 желтоқсан 2023 жыл, РҒА КБҒО Қолданбалы математика және автоматтандыру институты, Нальчик қ., РФ).

5. Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (16-19 сәуір 2024 жыл, ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ. Қазақстан Республикасы).

6. Әзербайжан ғалымы мен ойшылы Насириддин Тусиді еске алуға арналған «Modern problems of mathematics and mechanics» XI халықаралық конференциясы (3-6 шілде 2024 жыл, Баку қ., Азербайжан).

7. «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» халықаралық ғылыми конференциясы (24-26 қазан 2024 жыл, Мирзо Улугбек атындағы Өзбекстан ұлттық университеті, Ташкент қ., Өзбекстан Республикасы).

8. Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университетінің Қолданбалы математика институтының семинарында.

Докторанттың әрбір жарияланымды дайындауға қосқан үлесі. Ғылыми кеңесшілермен және қосалқы авторлармен бірлесіп жазылған 10 жұмыста ғылыми кеңесшілер есептің қойылымын ұсынды, ал докторант негізгі және көмекші нәтижелерді өз бетінше тұжырымдап, оларды дәлелдеді.

Диссертация құрылымы мен көлемі. 91 беттік диссертациялық жұмыс келесі құрылымдық элементтерден тұрады: кіріспе, екі бөлім, қорытынды, пайдаланылған әдебиеттер тізімі. Математикалық тұжырымдар (теоремалар, леммалар, ескертулер) және формулалардың нөмірленуі үш таңбалы: бірінші сан тарау, екінші сан бөлім нөмірін, ал үшінші сан математикалық тұжырымдар мен формулалардың өзіндік нөмірін білдіреді.

Жұмыстың қысқаша мазмұны

Кіріспе жойылатын воронка тәрізді және жылжымалы шекарасы бар облыстарда параболалық теңдеулер үшін шекаралық есептер теориясының қазіргі жағдайын бағалауды, тақырыпты әзірлеу үшін бастапқы деректерді, ғылыми-зерттеу жұмыстарын жүргізу қажеттілігінің негіздемесін қамтиды. Кіріспеде тақырыптың өзектілігі мен жаңалығы, мақсаттары, объектісі мен пәні, зерттеу міндеттері көрсетілген, қорғауға ұсынылған әдіснамалық қоры мен ережелер көрсетілген.

Бірінші бөлімде шекарасы уақыттың өзгеруімен жаңаратын және есептің шешімінің облысы уақыттың бастапқы сәтінде болмайтын, яғни нүктеге дейін жойылатын жылу өткізгіштіктің модельдік шеттік есебі зерттеледі. Бұл есептің шешімі ізделетін аймақтың шекарасы $\sqrt{x^2 + y^2} = t$ заңына сәйкес қозғалатын жағдай зерттеледі. Берілген есепті шешу үшін жылу потенциалдары әдісі қолданылады, бұл оны екінші текті сингулярлық Вольтерр типті интегралдық теңдеуге келтіруге мүмкіндік береді. Алынған интегралдық теңдеудің ерекшелігі – ол классикалық Вольтерр типті интегралдық теңдеулерінен түбегейлі ерекшеленеді, өйткені оған Пикар әдісі қолданылмайды және сәйкес біртекті интегралдық теңдеудің нөлдік емес шешімі бар.

Есептің қойылымы. Бүйір беті $\Gamma = \{(x, y, t) | \sqrt{x^2 + y^2} = t, t > 0\}$ болатын $Q = \{(x, y, t) | \sqrt{x^2 + y^2} < t, t > 0\}$ конусындағы кеңістіктік айнымалылар бойынша екі өлшемді шеттік есеп қарастырылады:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - a^2 \beta \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (0.1)$$

$$u(x, y, t)|_{\Gamma} = g(x, y, t), \quad (0.2)$$

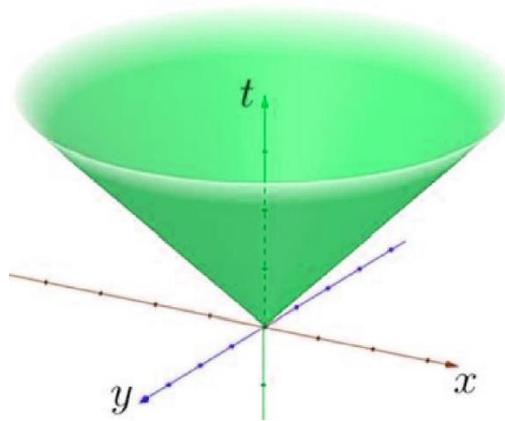
мұнда $0 < \beta < 1$, $g(x, y, t)$ – берілген функция. Q облысындағы (0.1) теңдеуді және (0.2) шеттік шартты қанағаттандыратын $u(x, y, t)$ функциясын табу керек.

(0.1)-(0.2) есебінде цилиндрлік координаттарға ауыса отырып, $Q = \{(r, t) | 0 < r < t, t > 0\}$ облысында (2-сурет) келесі шеттік есепті аламыз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{1 - 2\beta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad 0 < \beta < 1, \quad (0.3)$$

$$u(r, t)|_{r=0} = g_1(t), \quad t > 0 \quad (0.4)$$

$$u(r, t)|_{r=t} = g_2(t), \quad t > 0. \quad (0.5)$$



Сурет 2 – Q облысы

(0.3)-(0.5) есептің шешімін қос қабатты жылу потенциалдарының қосындысы түрінде іздейміз:

$$u(r, t) = \int_0^t \left\{ \frac{r^\beta \tau^{1-\beta} (r - \tau)}{4a^4 (t - \tau)^2} \exp \left[-\frac{(r - \tau)^2}{4a^2 (t - \tau)} \right] \exp \left[-\frac{r\tau}{2a^2 (t - \tau)} \right] I_\beta \left(\frac{r\tau}{2a^2 (t - \tau)} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{r^{\beta+1}\tau^{1-\beta}}{4a^4(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta-1,\beta}\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) + \\
& + \frac{r^\beta(1-2\beta)}{2a^2(t-\tau)\tau^\beta} \exp\left[-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) \Big\} \mu(\tau) d\tau \\
& + \int_0^t \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{r^{2\beta}}{2^\beta(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot \nu(\tau) d\tau, \quad (0.6)
\end{aligned}$$

мұнда $I_\beta(z)$ – бірінші текті β ретті Бессельдің модификацияланған функциясы (Инфельд функциясы).

(0.6)-ші теңдікпен анықталатын $u(r, t)$ функциясы үшін (0.4)-(0.5) шеттік шарттарының қанағаттануын талап ете отырып, (0.3)-(0.6) шеттік есебі Вольтерр типті сингулярлық интегралдық теңдеуге келтіріледі:

$$\begin{aligned}
\mu(t) - \int_0^t & \left\{ \frac{t^\beta(1-2\beta)}{(t-\tau)\tau^\beta} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}} \cdot e^{-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_\beta\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) + \right. \\
& + \frac{t^{\beta+1}\tau^{1-\beta}}{2a^2(t-\tau)^2} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}} \cdot e^{-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_{\beta-1,\beta}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) + \\
& \left. + \frac{t^\beta\tau^{1-\beta}}{2a^2(t-\tau)} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}} \cdot e^{-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_\beta\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) \right\} \mu(\tau) d\tau = F(t). \quad (0.7)
\end{aligned}$$

мұнда

$$I_{\beta-1,\beta}(z) = I_{\beta-1}(z) - I_\beta(z),$$

$$F(t) = -2a^2 g_2(t) + 2a^2 \widetilde{g}_1(t, t).$$

$t^{1-\beta} \cdot e^{\frac{t}{4a^2}} \mu(t) = \mu_1(t)$, $t^{1-\beta} \cdot e^{\frac{t}{4a^2}} F(t) = F_1(t)$ белгілеулерін енгізе отырып:

$$\mu_1(t) - \int_0^t N(t, \tau) \mu_1(\tau) d\tau = F_1(t), \quad (0.8)$$

мұнда:

$$\begin{aligned}
N(t, \tau) &= \sum_{i=1}^2 N_i(t, \tau), \\
N_1(t, \tau) &= \frac{t(1-2\beta)}{\tau(t-\tau)} \exp\left[-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{t^2}{2a^2(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta-1,\beta}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right), \quad (0.9)$$

$$N_2(t, \tau) = \frac{t}{2a^2(t-\tau)} \exp\left[-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right). \quad (0.10)$$

Бұл интегралдық теңдеудің ерекшелігі келесі ескертуден туындайды.

Ескерту 1. (0.7) интегралдық теңдеудің ядросы үшін келесі теңдік орындалады:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t N(t, \tau) d\tau = \frac{1-\beta}{\beta},$$

және $\forall t > 0, \forall \beta \in (0; 1)$:

$$\int_0^t N_1(t, \tau) d\tau = \frac{1-\beta}{\beta}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t N_2(t, \tau) d\tau = 0. \quad (0.11)$$

Соңғы екі теңдікті дәлелдеу үшін келесі лемманы қолданамыз.

Лемма 1. Егер $\beta > 0$ болса, онда барлық $z \in (0; +\infty)$ мәндері үшін келесі теңсіздік дұрыс болады:

$$|I_{\beta-1}(z) - I_{\beta}(z)| \cdot e^{-z} < D \cdot \frac{z^{\beta-1}}{(1+z)^{\frac{1}{2}+\beta}},$$

мұнда $D = const$, және келесі теңдік әділ:

$$\int_0^{\infty} e^{-z} \{I_{\beta-1}(z) - I_{\beta}(z)\} dz = 1.$$

Келесі сипаттамалық интегралдық теңдеуді зерттейміз:

$$\mu_1(t) - \int_0^t N_1(t, \tau) \mu_1(\tau) d\tau = \Phi(t). \quad (0.12)$$

Ескерту 2. 1-ші ескертуден келесі тұжырым шығады: $\frac{1}{2} < \beta < 1$, $(0 < \frac{1-\beta}{\beta} < 1)$ болғанда (0.12) интегралдық теңдеуінің елеулі шектелген

функциялар класында тізбектеп жуықтау әдісімен табуға болатын жалғыз шешімі бар.

1-ші ескертуден $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ болғанда

$$\frac{1 - \beta}{\beta} \geq 1$$

екенін аламыз, сондықтан (0.12) теңдеуі шынымен де (0.7) теңдеудің сипаттамалық теңдеуі болады.

t, τ айнымалыларының орнына x, y жаңа айнымалылар енгіземіз:

$$t = \frac{1}{y}, \quad \tau = \frac{1}{x}; \quad \mu_1(t) = \mu_1\left(\frac{1}{y}\right) = \mu_2(y), \quad \Phi(t) = \Phi\left(\frac{1}{y}\right) = \Phi_1(y) \quad (0.13)$$

онда (0.12)-ші теңдеу белгісіз $\mu_2(y)$ функциясына қатысты алғанда келесі интегралдық теңдеуге келтіріледі:

$$\mu_2(y) - \int_y^{\infty} M_-(y-x) \mu_2(x) dx = \Phi_1(y), \quad (0.14)$$

мұнда

$$M_-(y-x) = \frac{1-2\beta}{x-y} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2a^2(x-y)}\right) \cdot I_{\beta}\left(\frac{1}{2a^2(x-y)}\right) + \frac{1}{2a^2(x-y)^2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2a^2(x-y)}\right) \cdot I_{\beta-1,\beta}\left(\frac{1}{2a^2(x-y)}\right).$$

Ескерту 3. Егер (0.12)-ші теңдеудің шешімі табылатын болса, онда (0.7)-ші теңдеудің шешімін сипаттамалық теңдеуді регуляризация әдісімен шешу арқылы аламыз.

(0.14)-шы теңдеу екінші типтегі Вольтерр теңдеулерінен түбегейлі ерекшеленеді, олар үшін шешім бар және жалғыз. Сәйкес келесі біртекті теңдеуді шешу жалпы жағдайда тривиальды емес болуы да мүмкін:

$$\mu_2(y) - \int_y^{\infty} M_-(y-x) \mu_2(x) dx = 0, \quad (0.15)$$

(0.15)-ші интегралдық теңдеудің меншікті функциялары p параметріне қатысты алғанда келесі трансценденттік теңдеудің [76] түбірлерімен анықталады:

$$\widehat{M}_-(-p) = \int_0^{\infty} M_-(z) \cdot e^{pz} dz = 1, \quad \operatorname{Re} p < 0$$

Лаплас түрлендіруін (0.15) теңдеуге қолдана отырып алатынымыз:

$$\widehat{\mu}_2(p) \cdot [1 - \widehat{M}_-(-p)] = 0, \quad \operatorname{Re} p < 0.$$

Онда (0.13)-ші бұрынғы айнымалыларға қайта оралып, (0.12)-ші теңдеуге сәйкес келетін біртекті интегралдық теңдеудің $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғанда меншікті функциясының бар екендігін аламыз:

$$\mu^{(0)}(t) = C \cdot \frac{1}{t^{1-\beta}} \cdot e^{\frac{p_0 - t}{4a^2}}, \quad p_0 < 0, \quad C = \text{const.}$$

Ескерту 4. $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғанда $\forall t \in (0, \infty)$ үшін $\mu^{(0)}(t)$ меншікті функциясы шектелген. Сәйкесінше $\beta = \frac{1}{2}$ болғанда меншікті функцияның түрі келесідей болады:

$$\mu^{(0)}(t) = C \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{t}{4a^2}}, \quad C = \text{const.}$$

Модельдік шешімдер әдісін қолдана отырып [76, p. 561] (0.14) теңдеудің келесі шешімін аламыз:

$$\varphi_1(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\widehat{\Phi}_1(p)}{1 - \widehat{M}_-(-p)} dp = \Phi_1(y) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \widehat{R}_-(-p) \widehat{\Phi}_1(p) e^{pz} dp,$$

мұнда

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_1(p) &= \int_0^{\infty} \Phi_1(y) e^{-py} dy, \quad \widehat{R}_-(-p) = \frac{\widehat{M}_-(-p)}{1 - \widehat{M}_-(-p)}, \quad \operatorname{Re} p < 0; \\ \widehat{M}_-(-p) &= 1 + 2I_\beta \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) \left[(1 - 2\beta) K_\beta \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) - \frac{\sqrt{-p}}{a} K_{\beta-1} \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) \right], \\ &\operatorname{Re} p < 0. \end{aligned}$$

Егер $\widehat{R}_-(-p) \doteq R_-(y)$ болса, онда (0.14) теңдеудің шешімі келесі түрде болады:

$$\varphi_1(y) = \Phi_1(y) + \frac{1}{2\pi i} \int_y^{\infty} R_-(y-x)\Phi_1(x)dx. \quad (0.16)$$

$R_-(y)$ резольвентасын табу үшін оның бейнесін келесі түрде жазамыз:

$$\widehat{R}_-\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) = \frac{1 - 2I_\beta\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) \left[\frac{\sqrt{-p}}{a} K_{\beta-1}\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) - (1 - 2\beta)K_\beta\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) \right]}{2I_\beta\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) \left[\frac{\sqrt{-p}}{a} K_{\beta-1}\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) - (1 - 2\beta)K_\beta\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) \right]}, \operatorname{Re} p < 0$$

және [77] қасиеттерін қолданамыз:

1. Егер $\varphi(t) \doteq \widehat{\varphi}(p)$ болса, онда

$$\varphi(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} \widehat{\varphi}\left(\frac{p}{\alpha}\right), \alpha > 0.$$

2. Егер $\widehat{\varphi}(p) \doteq \varphi(t)$ болса, онда

$$\widehat{\varphi}(\sqrt{p}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \tau \cdot e^{-\tau^2} \varphi(\tau) d\tau.$$

Осылайша $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғанда алатынымыз:

$$R_-^*(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{-z_k y}}{2I_{\beta-1}(z_k) [z_k K_{\beta-1}(z_k) - (1 - 2\beta)K_\beta(z_k)]} + \frac{e^{-z_0 y}}{2I_\beta(z_0) K_{\beta-1}(z_0) \left[1 - \frac{1}{1-2\beta} z_0^2 \right]}. \quad (0.17)$$

(0.17) теңдігінен, сондай-ақ бейненің 1. және 2. қасиеттерінен:

$$\widehat{R}_-\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) \doteq R_-(y) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}y^{\frac{3}{2}}} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} A_{\beta,k} \cdot \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{4y} - ia^2 \alpha_k x} dx + \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}y^{\frac{3}{2}}} \cdot A_{\beta,0} \cdot \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{4y} - z_0 a^2 x} dx.$$

Лемма 2. $R_-(y)$ резольвента үшін келесі бағалау орындалады:

$$R_-(y) \leq \frac{A}{\sqrt{y}}$$

Төмендегі теңдеудің шешімі

$$\mu_2(y) - \int_y^\infty M_-(y-x) \mu_2(x) dx = \Phi_1(y),$$

$0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғанда келесі түрде болады:

$$\mu_2(y) = \Phi_1(y) + \int_y^\infty R_-(x-y) \Phi_1(x) dx + C e^{p_0 y},$$

Ескі айнымалыларға орала отырып, (0.16) сипаттамалық теңдеудің шешімін табамыз:

$$\mu_1(t) = t \cdot \Phi_2(t) + \int_0^t \tilde{R}(t, \tau) \cdot \Phi_2(\tau) d\tau + C e^{\frac{p_0}{t}}, \quad (0.18)$$

мұнда

$$\tilde{R}(t, \tau) \leq C \cdot \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\tau} \cdot \sqrt{t - \tau}}$$

Теорема 1. Кез келген $t^{-\beta} e^{\frac{t}{4a^2}} \cdot F(t) \in L_\infty(0, \infty)$ ($0 < \beta < \frac{1}{2}$) функциясы үшін (0.7)-ші бастапқы интегралдық теңдеудің

$$t^{-\beta} \exp\left[\frac{t}{4a^2}\right] \mu(t) \in L_\infty(0, \infty), \quad \left(0 < \beta < \frac{1}{2}\right)$$

функциялар класында жалғыз ғана шешімі бар болады, ол тізбектеп жуықтау әдісімен табылады.

Бірінші бөлімнің негізгі нәтижесін тұжырымдайық.

Теорема 2. Егер $g_1(t) \in L_\infty(0, \infty)$, $t^{-\beta} g_2(t) \in L_\infty(0, \infty)$ ($0 < \beta < \frac{1}{2}$) шарттары орындалса, онда (0.3)-(0.5) шеттік есептің шешімі $u(r, t) \in L_\infty(G)$ және келесі формула арқылы анықталады:

$$u(r, t) = \sum_{i=1}^3 u_i(r, t) + \widetilde{g}_1(r, t),$$

мұнда

$$u_1(r, t) = \int_0^t \frac{r^\beta \tau^{1-\beta} (r - \tau)}{4a^4 (t - \tau)^2} \cdot e^{-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_\beta \left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)} \right) \mu(\tau) d\tau,$$

$$u_2(r, t) = \int_0^t \frac{r^{\beta+1} \tau^{1-\beta}}{4a^4 (t - \tau)^2} \cdot e^{-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)} \right) \mu(\tau) d\tau,$$

$$u_3(r, t) = \int_0^t \frac{r^\beta (1 - 2\beta)}{2a^2 (t - \tau) \tau^\beta} \cdot e^{-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_\beta \left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)} \right) \mu(\tau) d\tau,$$

$$\widetilde{g}_1(r, t) = \frac{1}{(2a^2)^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{r^{2\beta}}{(t - \tau)^{\beta+1}} \cdot \exp \left[-\frac{r^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \cdot g_1(\tau) d\tau.$$

$$\mu(t) = \mu_{\text{part}}(t) + C\mu_{\text{hom}}(t).$$

Екінші бөлімде канондық емес облыстағы жылу өткізгіштіктің екі өлшемді теңдеуі үшін шекарасы $x = t^\omega$, $\omega > \frac{1}{2}$ дәрежелік заңдылық бойынша өзгеретін шеттік есеп зерттеледі. Есептің шешімдер облысы уақыттың бастапқы сәтінде болмайды, яғни ол нүктеге дейін жойылады.

Есептің қойылымы. $\Gamma = \left\{ (x, y, t) \mid \sqrt{x^2 + y^2} = t^\omega, t > 0, \omega > \frac{1}{2} \right\}$ бүйір бетімен берілген $Q = \left\{ (x, y, t) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < t^\omega, t > 0, \omega > \frac{1}{2} \right\}$ облысында келесі теңдеу үшін шеттік есеп қарастырылады:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - a^2 \beta \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f(x, y, t) \quad (0.19)$$

$$u(x, y, t)|_\Gamma = g(x, y, t) \quad (0.20)$$

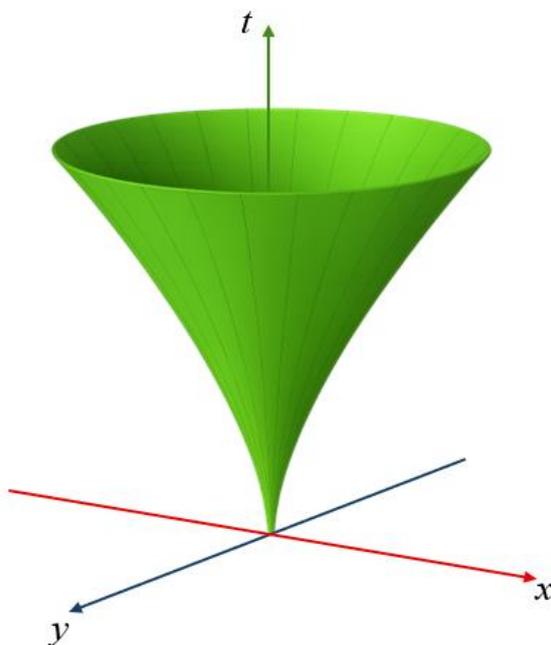
мұнда $g(x, y, t)$ – берілген функция, $0 < \beta < 1$.

(0.19)-(0.20) есебінде цилиндрлік координаттарға ауысып, $Q = \left\{ (r, t) \mid 0 < r < t^\omega, t > 0, \omega > \frac{1}{2} \right\}$ облысында (3-сурет) келесі шеттік есепті аламыз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{1 - 2\beta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (0.21)$$

$$u(r, t)|_{r=0} = g_1(t), \quad t > 0 \quad (0.22)$$

$$u(r, t)|_{r=t^\omega} = g_2(t), \quad t > 0. \quad (0.23)$$



Сурет 3 – Q облысы

(0.21)-(0.23) есебінің шешімін қос қабатты жылу потенциалдарының қосындысы түрінде іздейміз:

$$\begin{aligned}
 u(r, t) = & \\
 = & \int_0^t \left\{ \frac{r^\beta \tau^{\omega(1-\beta)} (r - \tau^\omega)}{4a^4(t - \tau)^2} \exp \left[-\frac{(r - \tau^\omega)^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \exp \left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right] I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right) + \right. \\
 & + \frac{r^{\beta+1} \tau^{\omega(1-\beta)}}{4a^4(t - \tau)^2} \exp \left[-\frac{(r - \tau^\omega)^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \exp \left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right] I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right) + \\
 & \left. + \frac{r^\beta (1 - 2\beta)}{2a^2(t - \tau) \tau^{\omega\beta}} \exp \left[-\frac{(r - \tau^\omega)^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \exp \left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right] \cdot I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right) \right\} \mu(\tau) d\tau \\
 & + \int_0^t \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{r^{2\beta}}{2^\beta (t - \tau)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{\beta \Gamma(\beta)} \cdot \exp \left[-\frac{r^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \cdot \nu(\tau) d\tau, \quad (0.24)
 \end{aligned}$$

мұнда $I_\beta(z)$ – бірінші текті β ретті Бессельдің модификацияланған функциясы.

(0.24)-ші теңдікпен анықталатын $u(r, t)$ функциясы үшін (0.22)-(0.23) шеттік шарттарының қанағаттануын талап ете отырып, (0.21)-(0.24) шеттік есебі Вольтерр типті сингулярлық интегралдық теңдеуге келтіріледі:

$\mu(t)$ –

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \left\{ \frac{t^{\omega\beta} \tau^{\omega(1-\beta)} (t^\omega - \tau^\omega)}{2a^2(t-\tau)^2} \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)} \right] \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right] I_\beta \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right) \right. \\
& + \frac{t^{\omega(\beta+1)} \tau^{\omega(1-\beta)}}{2a^2(t-\tau)^2} \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)} \right] \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right] I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right) + \\
& \left. + \frac{t^{\omega\beta} (1-2\beta)}{(t-\tau) \tau^{\omega\beta}} \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)} \right] \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right] \cdot I_\beta \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right) \right\} \mu(\tau) d\tau \\
& = f(t). \quad (0.25)
\end{aligned}$$

мұнда

$$I_{\beta-1, \beta}(z) = I_{\beta-1}(z) - I_\beta(z),$$

$$f(t) = -2a^2 g_2(t) + 2a^2 \widetilde{g}_1(t^\omega, t).$$

(0.25)-ші бастапқы интегралдық теңдеуді зерттеу үшін, жаңа $\mu_1(t)$ функциясын енгіземіз:

$$\mu_1(t) = t^{\omega(1-\beta)} \cdot \mu(t),$$

онда келесі теңдеуді аламыз:

$$\mu_1(t) - \int_0^t \sum_{i=1}^3 N_{i\omega}(t, \tau) \cdot \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)} \right] \mu_1(\tau) d\tau = t^{\omega(1-\beta)} \cdot f(t), \quad (0.26)$$

мұнда

$$\begin{aligned}
N_{1\omega}(t, \tau) &= \frac{(1-2\beta)t^\omega}{(t-\tau)\tau^\omega} \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right] \cdot I_\beta \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right), \\
N_{2\omega}(t, \tau) &= \frac{t^{2\omega}}{2a^2(t-\tau)^2} \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right] I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right), \\
N_{3\omega}(t, \tau) &= \frac{t^\omega (t^\omega - \tau^\omega)}{2a^2(t-\tau)^2} \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right] I_\beta \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right).
\end{aligned}$$

Ескерту 5. Кез келген $\omega > \frac{1}{2}$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ мәндері үшін келесі теңдіктер ақиқат:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \{N_{1\omega}(t, \tau) + N_{2\omega}(t, \tau)\} d\tau = \frac{1-\beta}{\beta}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t N_{3\omega}(t, \tau) d\tau = 0.$$

$\frac{1}{2} < \omega < 1$ болғанда

$$\int_0^t N_{3\omega}(t, \tau) d\tau \leq C(a, \omega) \cdot t^{\frac{2\omega-1}{2}}.$$

Ескерту 6. 5-ші ескертуден келесі тұжырым шығады: $\frac{1}{2} < \beta < 1$ болғанда (0.25) интегральдық теңдеуінің елеулі шектелген функциялар класында тізбектеп жуықтау әдісімен табуға болатын жалғыз шешімі бар. $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғанда берілген теңдеу сингулярлы болады және оған тізбектеп жуықтау әдісі қолданылмайды.

Сондықтан біз $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғандағы жағдайды қарастырамыз және (0.25) сингулярлық интегральдық теңдеудің шешімін табу үшін сәйкес сипаттамалық теңдеуді құрамыз:

$$\mu_1(t) - \int_0^t \sum_{i=1}^2 N_{ih}(t, \tau) \cdot e^{-\frac{(2\omega-1)(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1})}{4a^2}} \mu_1(\tau) d\tau = q(t), \quad (0.27)$$

мұнда

$$\begin{aligned} N_{1h}(t, \tau) &= \\ &= \frac{(1-2\beta)(2\omega-1)t^{2\omega-1}}{(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1})\tau} e^{-\frac{(2\omega-1)t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}}{2a^2(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1})}} I_{\beta} \left(\frac{(2\omega-1) \cdot t^{2\omega-1} \tau^{2\omega-1}}{2a^2(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1})} \right), \\ N_{2h}(t, \tau) &= \\ &= \frac{(2\omega-1)^2 t^{4\omega-2} \tau^{2\omega-2}}{2a^2(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1})^2} e^{-\frac{(2\omega-1)t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1}}{2a^2(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1})}} I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{(2\omega-1) \cdot t^{2\omega-1} \tau^{2\omega-1}}{2a^2(t^{2\omega-1}-\tau^{2\omega-1})} \right). \end{aligned}$$

(0.27)-ші теңдеу (0.26)-ші теңдеу үшін шынымен де сипаттамалық теңдеу болатыны келесі ескерту мен теоремадан шығады.

Ескерту 7. $\omega > \frac{1}{2}, 0 < \beta < \frac{1}{2}$ кез келген мәні үшін келесі теңдіктер ақиқат болады:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \{N_{1h}(t, \tau) + N_{2h}(t, \tau)\} d\tau = \frac{1-\beta}{\beta}.$$

Теорема 3. Егер $\omega > \frac{1}{2}, 0 < \beta < \frac{1}{2}$ болса, онда келесі теңсіздік әділ болады:

$$|(P_{1\omega} + P_{2\omega}) - (P_{1h} + P_{2h})| \leq C_1(\omega, \beta) |\omega - 1| \cdot \frac{t^{(\beta+1)\omega-1} \cdot \tau^{(\beta-1)\omega}}{(t - \tau)^\beta} \cdot e^{-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}}.$$

Келесі белгілеулерді енгіземіз:

$$P_{i\omega}(t, \tau) = N_{i\omega}(t, \tau) \cdot e^{-Q_\omega(t, \tau)}, \quad P_{ih}(t, \tau) = N_{ih}(t, \tau) \cdot e^{-Q_h(t, \tau)}, \quad i = 1, 2.$$

мұнда

$$Q_\omega(t, \tau) = \frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t - \tau)}, \quad Q_h(t, \tau) = \frac{(2\omega - 1) \cdot (t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})}{4a^2}.$$

Теореманы дәлелдеу үшін келесі леммалардың дұрыс екендігі көрсетілді.

Лемма 3. Егер $\omega > 1$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болса, онда

$$Q_h(t, \tau) \geq Q_\omega(t, \tau), \quad \text{яғни} \quad e^{-Q_h(t, \tau)} \leq e^{-Q_\omega(t, \tau)},$$

теңсіздігі орындалады. Егер $\frac{1}{2} < \omega < 1$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болса, онда

$$Q_h(t, \tau) \leq Q_\omega(t, \tau), \quad \text{яғни} \quad e^{-Q_h(t, \tau)} \geq e^{-Q_\omega(t, \tau)}$$

теңсіздігі орындалады.

Лемма 4. Егер $\omega > \frac{1}{2}$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болса, онда

$$|N_{1\omega} - N_{1h}| \leq C_i(\omega, \beta) |\omega - 1| \cdot \frac{t^{(\beta+1)\omega-1} \cdot \tau^{(\beta-1)\omega}}{(t - \tau)^\beta} \cdot e^{-Q_\omega(t, \tau)}$$

теңсіздігі орындалады.

Лемма 5. Егер $\omega > \frac{1}{2}$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болса, онда:

$$|P_{2\omega}(t, \tau) - P_{2h}(t, \tau)| \leq C_2(\omega, \beta) \cdot \frac{t^{(\beta+1)\omega} \cdot \tau^{(\beta-1)\omega}}{(t - \tau)^\beta} \cdot e^{-Q_\omega(t, \tau)}$$

теңсіздігі орындалады.

Ескерту 8. $\frac{1}{2} < \omega < 1$ болғанда ω параметрінің мәні үшін осы теңсіздіктерде $N_{i\omega}$ және N_{ih} ($i = 1, 2$) функцияларының рөлдерін сәйкесінше ауыстырған жеткілікті.

$$t_1 = \left[\frac{1}{2\omega - 1} \cdot t \right]^{\frac{1}{2\omega-1}}, \quad \tau_1 = \left[\frac{1}{2\omega - 1} \cdot \tau \right]^{\frac{1}{2\omega-1}}.$$

ауыстыруларын қолдана отырып (0.26) сипаттамалық теңдеудің шешімі келесі түрде болады:

$$\mu_{1h}(t) = F_h(t) + \int_0^t R_h(t, \tau) F_h(\tau) d\tau + C \mu_{1h}^{(0)}(t), \quad (0.28)$$

мұнда $R(t, \tau)$ резольвентаның келесі бағалауы бар:

$$R_h(t, \tau) \leq C_1(\omega, \beta) \frac{t^{(2\omega-1)(1-(\beta-\varepsilon))} \cdot \tau_1^{-(2\omega-1)-(\beta-\varepsilon)}}{(t - \tau_1)^{1-(\beta-\varepsilon)}}, \quad 0 < \varepsilon < \beta$$

$$\mu_{1h}^{(0)}(t) = C \cdot \exp\left(-\frac{p_0(\beta)}{(2\omega - 1)t^{2\omega-1}}\right), \quad p_0(\beta) > 0.$$

Сипаттамалық теңдеудің шешімімен (0.26) интегралдық теңдеуге регуляризация жүргіземіз. Ол үшін (0.26) теңдеуді келесі түрде жазамыз:

$$\mu_1(t) - \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^3 P_{i\omega}(t, \tau) \right\} \mu_1(\tau) d\tau = f_1(t), \quad (0.29)$$

$$P_{3\omega}(t, \tau) = N_{3\omega}(t, \tau) \cdot e^{-Q_\omega(t, \tau)}.$$

Бұл теңдеуді сипаттамалық теңдеудің шешімі арқылы регуляризациялайық:

$$\mu_1(t) - \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^2 P_{ih}(t, \tau) \right\} \mu_1(\tau) d\tau =$$

$$= f(t) + \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^2 [P_{i\omega}(t, \tau) - P_{ih}(t, \tau)] + P_{3\omega}(t, \tau) \right\} \mu_1(\tau) d\tau.$$

Оң жағы белгілі деп есептеп, оның шешімін жазамыз және жаңа интегралдық теңдеу аламыз:

$$\mathbb{K}_r \mu_1 \equiv \mu_1(t) - \int_0^t K(t, \tau) \mu_1(\tau) d\tau = f_{1r}(t), \quad (0.30)$$

мұнда

$$K(t, \tau) = \sum_{i=1}^2 [P_{i\omega}(t, \tau) - P_{ih}(t, \tau)] + P_{3\omega}(t, \tau) +$$

$$+ \int_{\tau}^t R_h(t, \tau_1) \left\{ \sum_{i=1}^2 [P_{i\omega}(\tau_1, \tau) - P_{ih}(\tau_1, \tau)] + P_{3\omega}(\tau_1, \tau) \right\} d\tau_1,$$

$$f_{1r}(t) = \int_0^t R_h(t, \tau_1) f_1(\tau_1) d\tau_1 + f_1(t) + C\mu_{1h}^{(0)}(t),$$

$R_h(t, \tau_1)$ резольвентаның бағалауы келесідей болады:

$$R_h(t, \tau_1) \leq C_1(\omega, \beta, \gamma) \frac{t^{(2\omega-1)(1-\beta+\varepsilon)} \cdot \tau_1^{-(2\omega-1)-(\beta-\varepsilon)}}{(t - \tau_1)^{1-\beta+\varepsilon}}$$

мұнда $0 < \varepsilon < \beta$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

(0.29) интегралдық теңдеуді тізбектеп жуықтау әдісімен шешуге болатынын көрсету үшін оның $K(t, \tau)$ ядросына бағалау жүргізілді.

Лемма 6. Регуляризацияланған теңдеудің ядросына келесі бағалау беріледі:

$$|K(t, \tau)| \leq C_1(\omega, \beta, \gamma) \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^{(2\omega-1)(1-\beta+\varepsilon)} \cdot \frac{B(2\varepsilon\omega, 1 - \varepsilon)}{(t - \tau)^\varepsilon \cdot \tau^{1-2\varepsilon\omega}}.$$

мұнда $B(a, b)$ – Бета функция, $0 < \varepsilon < \beta$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

Ескерту 9. (0.29) қатынасынан

$$\mu_1(t) - \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^3 N_{i\omega}(t, \tau) \right\} \mu_1(\tau) d\tau = 0$$

біртекті теңдеуі келесі біртекті теңдеуге тең:

$$\mathbb{K}_r \mu_1 = \mu_1(t) - \int_0^t K(t, \tau) \mu_1(\tau) d\tau = C\mu_{1h}^{(0)}(t),$$

оның әрбір C үшін жалғыз шешімі болады, оны $\tilde{\mu}_1^{(0)}(t)$ деп белгілейік.

Осылайша, келесі теореманың дұрыстығы дәлелденді.

Теорема 4. $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғанда (0.29) біртекті емес интегралдық теңдеудің жалпы шешімі төмендегі функция болады:

$$\mu_1(t) = [\mathbb{K}_r]^{-1} f(t) + C \cdot \tilde{\mu}_1^{(0)}(t), \quad C = \text{const},$$

мұнда

$$\mu_1(t) \in M(0, +\infty), \quad M(0, +\infty) = L_\infty(0, +\infty) \cap C(0, +\infty).$$

Ал $\frac{1}{2} < \beta < 1$ болғанда оның жалғыз шешімі бар, яғни $C = 0$. Осылайша, (0.30)-ні ескере отырып,

$$t^{-\alpha+\omega(1-\beta)} \cdot e^{\frac{(2\omega-1)t^{2\omega-1}}{4a^2}} \cdot \mu(t) \in L_\infty(0, \infty)$$

функциялар класында (0.25) бастапқы интегралдық теңдеуінің шешімі табылды.

Екінші бөлімнің негізгі нәтижесін тұжырымдайық.

Теорема 5. Айталық $g_1(t) \in M(0, +\infty)$, $t^{\omega(1-\beta)}g_2(t) \in M(0, +\infty)$, $M(0, +\infty) = L_\infty(0, +\infty) \cap C(0, +\infty)$ шарттары орындалады делік, онда (0.21)-(0.23) шеттік есебінің шешімі

$$u(r, t) = \int_0^t \frac{\partial G(r, \xi, t - \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\tau^\omega} \mu(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial G(r, \xi, t - \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} v(\tau) d\tau,$$

мұнда

$$G(r, \xi, t - \tau) = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta \cdot \xi^{1-\beta}}{t - \tau} \cdot \exp \left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \cdot I_\beta \left(\frac{r\xi}{2a^2(t - \tau)} \right),$$

$$v(t) = 2a^2\beta g_1(t),$$

ал $\mu(t)$ келесі псевдо-Вольтерра интегралдық теңдеуінен анықталады:

$$\mu(t) - \int_0^t N(t, \tau)\mu(\tau) d\tau = f(t), \quad (0.31)$$

мұнда

$$N(t, \tau) = \frac{t^{\omega\beta} \tau^{\omega(1-\beta)} (t^\omega - \tau^\omega)}{2a^2(t - \tau)^2} \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right]$$

$$\cdot I_\beta \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right) +$$

$$+ \frac{t^{\omega(\beta+1)} \tau^{\omega(1-\beta)}}{2a^2(t - \tau)^2} \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right] \cdot I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right) +$$

$$+ \frac{t^{\omega\beta} (1 - 2\beta)}{(t - \tau)\tau^{\omega\beta}} \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right] \cdot I_\beta \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right),$$

$$I_{\beta-1,\beta}(z) = I_{\beta-1}(z) - I_{\beta}(z),$$

$$f(t) = -2a^2 g_2(t) + 2a^2 \widetilde{g}_1(t^\omega, t),$$

$$\widetilde{g}_1(r, t) = \frac{1}{(2a^2)^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{r^{2\beta}}{(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot g_1(t) d\tau.$$

Алғыс

Диссертация авторы өз зерттеу жұмысын орындауда ерекше кәсіби көзқарас танытып, жан-жақты қолдау көрсеткені және баға жетпес үлес қосқаны үшін ғылыми кеңесші, ф.-м.ғ.д., профессор Рамазанов Мурат Ибраевичке, сондай-ақ қосымша кеңесшілер ф.-м.ғ.д., профессор М.Т. Дженалиевке, PhD Н.К. Гульмановқа шын жүректен терең алғысын білдіреді. Олардың терең білімдері, ғылыми тұрғыдан құнды кеңестері мен жоғары деңгейдегі біліктілігі осы жұмыстың сәтті жүзеге асуына берік негіз болды. Әсіресе, зерттеу мақсатын нақты қоюда, жұмыстың құрылымын қалыптастыруда және әдістемесін таңдаудағы жетекші рөлін ерекше атап өткім келеді.

Сондай-ақ, зерттеу жұмысының сапасына елеулі әсер еткен ерекше бағыт-бағдары мен құнды ұсыныстары үшін ф.-м.ғ.д., профессор Псху Арсен Владимировичке алғыс білдіремін. Әсіресе, Нальчик қаласындағы ғылыми тағылымдама барысында көрсеткен кәсіби қолдауы үшін ризашылығымды білдіремін.

Диссертациялық жұмыс академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды ұлттық зерттеу университетінің математикалық талдау және дифференциалдық теңдеулер кафедрасында орындалды.

1 БҰРЫШТЫҚ ЖОЙЫЛАТЫН ОБЛЫСТАҒЫ МОДЕЛЬДІК ЕКІ ӨЛШЕМДІ ПАРАБОЛАЛЫҚ ЕСЕП

Берілген бөлімде шекарасы уақыттың өзгеруімен жаңаратын және есептің шешімінің облысы уақыттың бастапқы сәтінде болмайтын, яғни нүктеде жойылатын жылу өткізгіштіктің шеттік есептері зерттеледі. Берілген есепті шешу үшін жылу потенциалдары әдісі қолданылады, бұл оны екінші текті сингулярлық Вольтерр типті интегралдық теңдеуге келтіруге мүмкіндік береді. Алынған интегралдық теңдеудің ерекшелігі – ол классикалық Вольтерр типті интегралдық теңдеулерінен түбегейлі ерекшеленеді, өйткені оған Пикар әдісі қолданылмайды және сәйкес біртекті интегралдық теңдеудің нөлдік емес шешімі бар.

Қарастырылатын есеп модельдік деп аталады, себебі есептің шешімі ізделетін аймақтың шекарасы $x = t$ сызықтық заңына сәйкес қозғалатын жағдай зерттеледі.

1.1 Есептің қойылымы

Бүйір беті $\Gamma = \{(x, y, t) | \sqrt{x^2 + y^2} = t, t > 0\}$ болатын $Q = \{(x, y, t) | \sqrt{x^2 + y^2} < t, t > 0\}$ конусындағы кеңістіктік айнымалылар бойынша екі өлшемді шеттік есеп қарастырылады:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - a^2 \beta \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1.1.1)$$

$$u(x, y, t)|_{\Gamma} = g(x, y, t), \quad (1.1.2)$$

мұнда $0 < \beta < 1$, $g(x, y, t)$ – берілген функция. Q облысындағы (1.1.1) теңдеуді және (1.1.2) шеттік шартты қанағаттандыратын $u(x, y, t)$ функциясын табу керек.

Уақытқа байланысты өзгеретін және нүктеде жойылатын облыстарда осындай шеттік есептер мысалға келесі жағдайларда пайда болады: қозғалыс жылдамдығы координаттардың функциясы болып табылатын қозғалмалы ортадағы жылу беру процесін сипаттағанда; жоғары тоқты ажыратқыш аппараттардың электр доғасындағы жылу-физикалық процестерді математикалық модельдеу кезінде, бұл жағдайда катод аймағындағы доғаның осьтік қимасының байланыс нүктесіне тартылу әсері ескеріледі. Олар металлургияда, кристалдар өндірісінде, лазерлік технологияларда және т.б. жаңа технологияларды құруда да өзекті.

(1.1.1)-(1.1.2) есебінде цилиндрлік координаттарға ауысамыз.

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = r;$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(r, t)}{\partial t}.$$

Бірінші туындыларды табамыз.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}; & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \varphi; \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \varphi; \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \\ \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x} \end{cases} \end{aligned}$$

немесе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{y \cos^2 \varphi}{x^2} = -\frac{r \sin \varphi \cos^2 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\cos^2 \varphi}{x} = \frac{\cos^2 \varphi}{r \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi}{r}. \end{aligned}$$

Ендеше,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r},$$

одан шығатыны:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{xr^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{yr^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x^2 - y^2}{xyr^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Екінші туындыларды табамыз.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r^2}; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \sin \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}$$

екендігін ескерсек:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \cos^2 \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} - \\ &- \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r^2}. \end{aligned}$$

Жоғарыдағыға ұқсас:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{r^2}. \end{aligned}$$

Осы тік симметрия шартының орындалуын болжай отырып, алатынымыз:

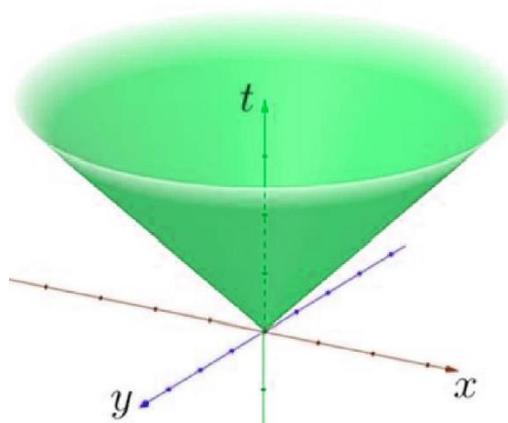
$$\begin{aligned} a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - a^2 \beta \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2\beta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \\ &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1-2\beta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Онда $Q = \{(r, t) | 0 < r < t, t > 0\}$ облысында (4-сурет) келесі шеттік есепті аламыз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{1-2\beta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad 0 < \beta < 1, \quad (1.1.3)$$

$$u(r, t)|_{r=0} = g_1(t), \quad t > 0 \quad (1.1.4)$$

$$u(r, t)|_{r=t} = g_2(t), \quad t > 0. \quad (1.1.5)$$



Сурет 4 – Q облысы

1.2 (1.1.3)-(1.1.5) шеттік есептің шешімін жылу потенциалдарының көмегімен беру

(1.1.3) тендеуі үшін фундаментальды шешім келесі функция болып табылады:

$$G(r, \xi, t - \tau) = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta \cdot \xi^{1-\beta}}{t - \tau} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t - \tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t - \tau)}\right), \quad (1.2.1)$$

мұнда ξ – параметр;

$I_\beta(z)$ – бірінші текті β ретті Бессельдің модификацияланған функциясы (Инфельд функциясы). (1.1.3)-(1.1.5) есептің шешімін қос қабатты жылу потенциалдарының қосындысы түрінде іздейміз:

$$u(r, t) = \int_0^t \frac{\partial G(r, \xi, t - \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\tau} \mu(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial G(r, \xi, t - \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \nu(\tau) d\tau, \quad (1.2.2)$$

мұнда $\mu(t)$ және $\nu(t)$ – ізделінді тығыздықтар.

(1.2.2) функциясын түрлендірейік, ол үшін туындысын табамыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(r, \xi, t - \tau)}{\partial \xi} &= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta}{t - \tau} \cdot \frac{1 - \beta}{\xi^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t - \tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t - \tau)}\right) + \\ &+ \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta \cdot \xi^{1-\beta}}{t - \tau} \cdot \left(-\frac{\xi}{2a^2(t - \tau)}\right) \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t - \tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t - \tau)}\right) + \\ &+ \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta \cdot \xi^{1-\beta}}{t - \tau} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t - \tau)}\right] \cdot \left(\frac{r}{2a^2(t - \tau)}\right) \times \\ &\times \left\{ I_{\beta-1}\left(\frac{r\xi}{2a^2(t - \tau)}\right) - \frac{2a^2(t - \tau)\beta}{r\xi} I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t - \tau)}\right) \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4a^4} \cdot \frac{r^\beta \cdot \xi^{2-\beta}}{(t-\tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) + \\
&+ \frac{1}{4a^4} \cdot \frac{r^{\beta+1} \cdot \xi^{1-\beta}}{(t-\tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_{\beta-1}\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) + \\
&+ \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta(1-\beta)}{(t-\tau)\xi^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) - \\
&- \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{\beta r^\beta}{(t-\tau)\xi^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) = \\
&= \frac{1}{4a^4} \cdot \frac{r^\beta \cdot \xi^{1-\beta}}{(t-\tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot \left\{ r I_{\beta-1}\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) - \xi I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) \right\} + \\
&+ \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta(1-2\beta)}{(t-\tau)\xi^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right),
\end{aligned}$$

мұнда біз [78] қатынасын қолдандық:

$$I'_\beta(z) = I_{\beta-1}(z) - \frac{\beta}{z} I_\beta(z).$$

Әрі қарай табатынымыз:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial G(r, \xi, t-\tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4a^4} \cdot \frac{r^\beta \cdot \xi^{1-\beta}}{(t-\tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \times \right. \\
&\quad \times \left\{ r I_{\beta-1}\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) - \xi I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) \right\} + \\
&\quad \left. + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta(1-2\beta)}{(t-\tau)\xi^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) \right] = \\
&= \left\| \left\| \begin{aligned} I_\beta(z) &\approx \frac{1}{2^\beta \Gamma(\beta+1)} \cdot z^\beta, & |z| \ll 1; \\ I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) &\approx \frac{1}{2^\beta \Gamma(\beta+1)} \cdot \frac{r^\beta \xi^\beta}{[2a^2(t-\tau)]^\beta}; \\ I_{\beta-1}\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) &\approx \frac{1}{2^{\beta-1} \Gamma(\beta)} \cdot \frac{r^{\beta-1} \xi^{\beta-1}}{[2a^2(t-\tau)]^{\beta-1}} \end{aligned} \right\| \right\| = \\
&= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4a^4} \cdot \frac{r^{\beta+1} \cdot \xi^{1-\beta}}{(t-\tau)^2} \cdot \frac{1}{2^{\beta-1} \Gamma(\beta)} \cdot \frac{r^{\beta-1} \xi^{\beta-1}}{[2a^2(t-\tau)]^{\beta-1}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] - \right. \\
&\quad - \frac{1}{4a^4} \cdot \frac{r^\beta \cdot \xi^{2-\beta}}{(t-\tau)^2} \cdot \frac{1}{2^\beta \Gamma(\beta+1)} \cdot \frac{r^\beta \xi^\beta}{[2a^2(t-\tau)]^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] + \\
&\quad \left. + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta(1-2\beta)}{(t-\tau)\xi^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta \Gamma(\beta+1)} \cdot \frac{r^\beta \xi^\beta}{[2a^2(t-\tau)]^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{r^{2\beta}}{2^{\beta-1}\Gamma(\beta)(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(2a^2)^{\beta+2}} \cdot \frac{r^{2\beta} \cdot \xi^2}{2^\beta \Gamma(\beta+1)(t-\tau)^{\beta+2}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{(1-2\beta)r^{2\beta}}{2^\beta \Gamma(\beta+1)(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \right] = \\
&= \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{r^{2\beta}}{(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \left[\frac{2}{\Gamma(\beta)} + \frac{(1-2\beta)}{\Gamma(\beta+1)} \right] \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] = \\
&= \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{r^{2\beta}}{(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right]
\end{aligned}$$

және

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial G(r, \xi, t - \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\tau} = \\
&= \frac{1}{4a^4} \cdot \frac{r^\beta \cdot \tau^{1-\beta}}{(t-\tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot \left\{ r I_{\beta-1} \left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)} \right) - \tau I_\beta \left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)} \right) \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta (1-2\beta)}{(t-\tau)\tau^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta \left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)} \right).
\end{aligned}$$

Соңғы теңдікті келесідей түрлендіреміз:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial G(r, \xi, t - \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\tau} = \\
&= \frac{r^\beta \tau^{1-\beta} (r - \tau)}{4a^4 (t - \tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{(r - \tau)^2}{4a^2(t - \tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau}{2a^2(t - \tau)}\right] I_\beta \left(\frac{r\tau}{2a^2(t - \tau)} \right) + \\
&\quad + \frac{r^{\beta+1} \tau^{1-\beta}}{4a^4 (t - \tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{(r - \tau)^2}{4a^2(t - \tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau}{2a^2(t - \tau)}\right] I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{r\tau}{2a^2(t - \tau)} \right) + \\
&\quad + \frac{r^\beta (1 - 2\beta)}{2a^2 (t - \tau) \tau^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{(r - \tau)^2}{4a^2(t - \tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau}{2a^2(t - \tau)}\right] I_\beta \left(\frac{r\tau}{2a^2(t - \tau)} \right), \quad (1.2.4)
\end{aligned}$$

мұнда

$$I_{\beta-1, \beta}(z) = I_{\beta-1}(z) - I_\beta(z)$$

белгілеуі енгізілген.

Алынған (1.2.3)-(1.2.4) қатынастарын (1.2.2) теңдігіне қойып, (1.2.5)-ші теңдеу шешімінің интегралдық түрін аламыз:

$$\begin{aligned}
u(r, t) = & \int_0^t \left\{ \frac{r^\beta \tau^{1-\beta} (r-\tau)}{4a^4(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] I_\beta\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) \right. \\
& + \frac{r^{\beta+1} \tau^{1-\beta}}{4a^4(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta-1, \beta}\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) + \\
& \left. + \frac{r^\beta(1-2\beta)}{2a^2(t-\tau)\tau^\beta} \exp\left[-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) \right\} \mu(\tau) d\tau + \\
& + \int_0^t \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{r^{2\beta}}{2^\beta(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot v(\tau) d\tau, \quad (1.2.5)
\end{aligned}$$

1.3 (1.1.3)-(1.1.5) шеттік есепті Вольтерр типті сингулярлық интегралдық теңдеуге келтіру

(1.2.5)-ші теңдікпен анықталатын $u(r, t)$ функциясы үшін (1.1.4)-(1.1.5) шеттік шарттарының қанағаттануын талап етейік, ол бізге $\mu(t)$ және $v(t)$ функцияларын анықтауға мүмкіндік беретін болады.

$$\begin{aligned}
& \lim_{r \rightarrow 0} u(r, t) = \\
= & \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_0^t \left\{ \frac{r^\beta \tau^{1-\beta} (r-\tau)}{4a^4(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] I_\beta\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) + \right. \right. \\
& + \frac{r^{\beta+1} \tau^{1-\beta}}{4a^4(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta-1, \beta}\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) + \\
& \left. + \frac{r^\beta(1-2\beta)}{2a^2(t-\tau)\tau^\beta} \exp\left[-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) \right\} \mu(\tau) d\tau \\
& \left. + \int_0^t \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{r^{2\beta}}{2^\beta(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot v(\tau) d\tau \right] = \\
= & \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t \frac{r^{2\beta}}{(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot v(\tau) d\tau = \\
= & \left\| \begin{array}{l} \frac{r^2}{4a^2(t-\tau)} = z; \quad t-\tau = \frac{r^2}{4a^2z}; \\ \tau = t - \frac{r^2}{4a^2z}; \quad d\tau = \frac{r^2 dz}{4a^2z^2} \end{array} \right\| = \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \times \\
& \times \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\frac{r^2}{4a^2t}}^{\infty} \frac{r^{2\beta} \cdot (4a^2)^{\beta+1} \cdot z^{\beta+1}}{r^{2\beta+2}} \cdot \frac{r^2}{4a^2z^2} \cdot e^{-z} \cdot v\left(t - \frac{r^2}{4a^2z}\right) dz =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot \frac{(4a^2)^{\beta+1}}{4a^2} \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\frac{r^2}{4a^2t}}^{\infty} z^{\beta-1} \cdot e^{-z} \cdot v\left(t - \frac{r^2}{4a^2z}\right) dz = \\
&= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot v(t) \cdot \int_0^{\infty} z^{\beta-1} \cdot e^{-z} dz = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot \Gamma(\beta) \cdot \psi(t) = \frac{1}{2a^2\beta} \cdot v(t) \\
&= g_1(t).
\end{aligned}$$

Осы жерден қажетті тығыздықтардың бірі – $v(t)$ тікелей анықталады:

$$v(t) = 2a^2\beta g_1(t).$$

Осылайша,

$$u(r, t) = \sum_{i=1}^3 u_i(r, t) + \widetilde{g}_1(r, t), \quad (1.3.1)$$

мұнда

$$\begin{aligned}
u_1(r, t) &= \int_0^t \frac{r^\beta \tau^{1-\beta} (r - \tau)}{4a^4(t - \tau)^2} \cdot e^{-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_\beta\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) \mu(\tau) d\tau, \\
u_2(r, t) &= \int_0^t \frac{r^{\beta+1} \tau^{1-\beta}}{4a^4(t - \tau)^2} \cdot e^{-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_{\beta-1, \beta}\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) \mu(\tau) d\tau, \\
u_3(r, t) &= \int_0^t \frac{r^\beta (1 - 2\beta)}{2a^2(t - \tau)\tau^\beta} \cdot e^{-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_\beta\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) \mu(\tau) d\tau, \\
\widetilde{g}_1(r, t) &= \frac{1}{(2a^2)^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{r^{2\beta}}{(t - \tau)^{\beta+1}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t - \tau)}\right] \cdot g_1(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Ескерту 1.3.1. Егер $g_1(t)$ шектеулі болса, онда $\widetilde{g}_1(r, t)$ функциясы да шектеулі болады.

Шынында да:

$$\widetilde{g}_1(r, t) \leq \frac{1}{(2a^2)^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot |g_1(t)| \int_0^t \frac{r^{2\beta}}{(t - \tau)^{\beta+1}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t - \tau)}\right] d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \frac{r^2}{4a^2(t-\tau)} = z \right\| = \frac{1}{(2a^2)^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot 4^\beta \cdot a^{2\beta} \cdot |g_1(t)| \int_{\frac{r^2}{4a^2t}}^{\infty} z^{\beta-1} \cdot e^{-z} dz = \\
&= |g_1(t)| \cdot \frac{\Gamma\left(\beta, \frac{r^2}{4a^2t}\right)}{\Gamma(\beta)} < |g_1(t)|, \quad \forall (r, t) \in G.
\end{aligned}$$

Енді (1.1.5) шеттік шартын қанағаттандырайық.

$$\begin{aligned}
u(r, t)|_{r=t} &= \lim_{r \rightarrow t-0} u(r, t) = g_2(t) = \widetilde{g}_1(t, t) + \\
&+ \int_0^t \left\{ \frac{t^{\beta+1}\tau^{1-\beta}}{4a^4(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{t-\tau}{4a^2}\right] \exp\left[-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta-1, \beta}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) + \right. \\
&+ \left. \frac{t^\beta(1-2\beta)}{2a^2(t-\tau)\tau^\beta} \exp\left[-\frac{t-\tau}{4a^2}\right] \exp\left[-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) \right\} \mu(\tau) d\tau - \frac{\mu(t)}{2a^2}.
\end{aligned}$$

Нәтижесінде белгісіз болған $\mu(t)$ тығыздығына қатысты келесі интегралдық теңдеуді аламыз:

$$\begin{aligned}
\mu(t) - \int_0^t \left\{ \frac{t^\beta(1-2\beta)}{(t-\tau)\tau^\beta} \exp\left[-\frac{t-\tau}{4a^2}\right] \exp\left[-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) + \right. \\
+ \frac{t^{\beta+1}\tau^{1-\beta}}{2a^2(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{t-\tau}{4a^2}\right] \exp\left[-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta-1, \beta}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) + \\
+ \left. \frac{t^\beta\tau^{1-\beta}}{2a^2(t-\tau)} \exp\left[-\frac{t-\tau}{4a^2}\right] \exp\left[-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] I_\beta\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) \right\} \mu(\tau) d\tau = F(t).
\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

мұнда

$$F(t) = -2a^2 g_2(t) + 2a^2 \widetilde{g}_1(t, t).$$

Келесі белгілеуді енгіземіз:

$$t^{1-\beta} \exp\left[\frac{t}{4a^2}\right] \mu(t) = \mu_1(t), \quad t^{1-\beta} \exp\left[\frac{t}{4a^2}\right] F(t) = F_1(t).$$

Онда соңғы интегралдық теңдеу келесі теңдеуге түрленеді:

$$\mu_1(t) - \int_0^t N(t, \tau) \mu_1(\tau) d\tau = F_1(t), \tag{1.3.3}$$

мұнда

$$N(t, \tau) = \sum_{i=1}^2 N_i(t, \tau),$$

$$N_1(t, \tau) = \frac{t(1-2\beta)}{\tau(t-\tau)} \exp\left[-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) + \frac{t^2}{2a^2(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta-1, \beta}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right), \quad (1.3.4)$$

$$N_2(t, \tau) = \frac{t}{2a^2(t-\tau)} \exp\left[-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] I_\beta\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right). \quad (1.3.5)$$

Бұл интегралдық теңдеудің ерекшелігі келесі ескертуден туындайды.

Ескерту 1.3.2. (1.3.2) интегралдық теңдеудің ядросы үшін келесі теңдік әділетті болады:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t N(t, \tau) d\tau = \frac{1-\beta}{\beta},$$

және $\forall t > 0, \forall \beta \in (0; 1)$:

$$\int_0^t N_1(t, \tau) d\tau = \frac{1-\beta}{\beta}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t N_2(t, \tau) d\tau = 0. \quad (1.3.6)$$

Соңғы екі теңдікті дәлелдеу үшін келесі лемманы қолданамыз.

Лемма 1.3.1. Егер $\beta > 0$ болса, онда барлық $z \in (0; +\infty)$ мәндері үшін келесі теңсіздік дұрыс болады:

$$|I_{\beta-1}(z) - I_\beta(z)| \cdot e^{-z} < D \cdot \frac{z^{\beta-1}}{(1+z)^{\frac{1}{2}+\beta}}, \quad (1.3.7)$$

мұнда $D = \text{const}$, және келесі теңдік әділ:

$$\int_0^\infty e^{-z} \{I_{\beta-1}(z) - I_\beta(z)\} dz = 1. \quad (1.3.8)$$

Дәлелдеуі. Алдымен (1.3.7) теңсіздігін дәлелдейік. Ол үшін төмендегі функцияны қарастырамыз:

$$h(z) = \left(\frac{z}{1+z}\right)^{1-\beta} \cdot (1+z)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-z} [I_{\beta-1}(z) - I_{\beta}(z)].$$

$h(z)$ функциясы $0 < z < +\infty$ аралығында үздіксіз. Егер $0 < z \ll 1$ болса, онда

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{1+z}\right)^{1-\beta} &\approx z^{1-\beta}, & (1+z)^{\frac{3}{2}} &\approx 1, & e^{-z} &\approx 1, \\ I_{\beta-1}(z) &\approx \frac{z^{\beta-1}}{2^{\beta-1}\Gamma(\beta)}, & I_{\beta}(z) &\approx \frac{z^{\beta}}{2^{\beta}\Gamma(\beta+1)} \end{aligned}$$

асимптотикалық теңдіктерді ескере отырып, алатынымыз:

$$\lim_{z \rightarrow 0} h(z) = \frac{1}{2^{\beta-1}\Gamma(\beta)}.$$

Егер $z \gg 1$ болса, онда

$$\left(\frac{z}{1+z}\right)^{1-\beta} \approx 1, \quad (1+z)^{\frac{3}{2}} \approx z^{\frac{3}{2}}, \quad e^{-z} [I_{\beta-1}(z) - I_{\beta}(z)] \approx \frac{2\beta-1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot z^{-\frac{3}{2}}$$

болғандықтан, келесіні аламыз:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = \frac{2\beta-1}{2\sqrt{2\pi}}.$$

Бұл жағдайда $h(z)$ функциясы $z, 0 < z < +\infty$ айнымалысының барлық мәндерінде шектелген болады, яғни қандай да бір D , $|h(z)| < D$ тұрақтысы бар болады, немесе

$$\left(\frac{z}{1+z}\right)^{1-\beta} \cdot (1+z)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-z} |I_{\beta-1}(z) - I_{\beta}(z)| < D.$$

Бұл теңсіздіктен алатынымыз

$$e^{-z} |I_{\beta-1}(z) - I_{\beta}(z)| < D \cdot \left(\frac{z}{1+z}\right)^{\beta-1} \cdot (1+z)^{-\frac{3}{2}}$$

немесе

$$|I_{\beta-1}(z) - I_{\beta}(z)| \cdot e^{-z} < D_1 \cdot \frac{z^{\beta-1}}{(1+z)^{\frac{1}{2}+\beta}},$$

осылайша қажеттісі дәлелденді. Енді (1.3.8)-ші теңдікті дәлелдейік. (1.3.7) бағалауына байланысты келесі интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-z} \{I_{\beta-1}(z) - I_{\beta}(z)\} dz$$

барлық $\beta > 0$ үшін абсолютті жинақты. a параметрінен тәуелді төмендегі интегралды қарастырайық:

$$Z(a) = \int_0^{\infty} e^{-az} \{I_{\beta-1}(z) - I_{\beta}(z)\} dz, \quad \beta > 0.$$

$a \geq 1$ болғандағы мәндер үшін ол $y = 0$ болғанда, $y = \infty$ кезінде де (1.3.7) бағалауы бойынша бірқалыпты жинақталады, сондықтан a параметріне тәуелді үздіксіз функцияны береді. $a > 1$ болғанда, оны екі жинақты интегралдың айырмасы түрінде жазуға болады

$$Z(a) = \int_0^{\infty} e^{-az} I_{\beta-1}(z) dz - \int_0^{\infty} e^{-az} I_{\beta}(z) dz.$$

Бізде берілген

$$\int_0^{\infty} e^{-az} I_{\beta-1}(z) dz = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1} \cdot (a + \sqrt{a^2 - 1})^{\beta-1}},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-az} I_{\beta}(z) dz = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1} \cdot (a + \sqrt{a^2 - 1})^{\beta}},$$

Онда

$$Z(a) = \frac{\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1} \cdot (a + \sqrt{a^2 - 1})^{\beta}}.$$

мұнда $a \rightarrow 1$ шегіне өтсек, қажетті (1.3.7) нәтижесін аламыз. Лемма дәлелденді.
1.3.2 ескертуінде келтірілген теңдіктерді дәлелдеуге көшейік. Шынында да,

$$\begin{aligned}
\int_0^t N_1(t, \tau) d\tau &= \int_0^t \left\{ \frac{t(1-2\beta)}{\tau(t-\tau)} \exp\left[-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{t^2}{2a^2(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta-1, \beta}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) d\tau \right\} = \\
&= \left\| \begin{aligned} \frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)} = z; \quad \tau = \frac{2a^2tz}{t+2a^2z}; \quad t-\tau = \frac{t^2}{t+2a^2z}; \\ d\tau = \frac{2a^2t^2}{(t+2a^2z)^2} dz \end{aligned} \right\| = \\
&= \int_0^\infty (1-2\beta) \cdot \frac{1}{z^2} \cdot z \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz + \int_0^\infty e^{-z} \cdot \{I_{\beta-1}(z) - I_\beta(z)\} dz = \\
&= (1-2\beta) \int_0^\infty \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz + 1 = \left\| \begin{aligned} (2.15.4.3) \\ [79, 2726.] \end{aligned} \right\| = \\
&= \frac{(1-2\beta)}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left[\beta, \frac{1}{2}\right]_{[1+\beta]} + 1 = \frac{1-\beta}{\beta}.
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2} < \beta < 1$ болғанда

$$0 < \frac{1-\beta}{\beta} < 1$$

екендігін ескерте кетейік.

$$\begin{aligned}
\int_0^t N_2(t, \tau) d\tau &= \int_0^t \frac{t}{2a^2(t-\tau)} \exp\left[-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] I_\beta\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) d\tau = \\
&= \left\| \frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)} = z \right\| = \int_0^\infty \frac{t}{t+2a^2z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz \leq \frac{t}{2a^2} \int_0^\infty \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz = \\
&= \frac{t}{2a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left[\beta, \frac{1}{2}\right]_{[1+\beta]} = \frac{t}{2a^2\beta} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

1.4 Сипаттамалық интегралдық теңдеуді шешу

(1.3.1)-ші интегралдық теңдеудің шешімін табу үшін алдымен келесі сипаттамалық интегралдық теңдеуді зерттейміз:

$$\mu_1(t) - \int_0^t N_1(t, \tau) \mu_1(\tau) d\tau = \Phi(t). \quad (1.4.1)$$

Ескерту 1.4.1. 1.3.2-ші ескертуден келесі тұжырым шығады: $\frac{1}{2} < \beta < 1$, $\left(0 < \frac{1-\beta}{\beta} < 1\right)$ болғанда (1.4.1) интегральдық теңдеуінің елеулі шектелген функциялар класында тізбектеп жуықтау әдісімен табуға болатын жалғыз шешімі бар.

1.3.2-ші ескертуден $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ болғанда

$$\frac{1-\beta}{\beta} \geq 1$$

екенін аламыз, сондықтан (1.4.1) теңдеуі шынымен де (1.3.2) теңдеудің сипаттамалық теңдеуі болады.

t, τ айнымалыларының орнына x, y жаңа айнымалылар енгіземіз:

$$t = \frac{1}{y}, \quad \tau = \frac{1}{x}; \quad \mu_1(t) = \mu_1\left(\frac{1}{y}\right) = \mu_2(y), \quad \Phi(t) = \Phi\left(\frac{1}{y}\right) = \Phi_1(y), \quad (1.4.2)$$

Онда (1.4.1)-ші теңдеу белгісіз $\mu_2(y)$ функциясына қатысты алғанда келесі интегралдық теңдеуге келтіріледі:

$$\mu_2(y) - \int_y^\infty M_-(y-x) \mu_2(x) dx = \Phi_1(y), \quad (1.4.3)$$

мұнда

$$M_-(y-x) = \frac{1-2\beta}{x-y} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2a^2(x-y)}\right) \cdot I_\beta\left(\frac{1}{2a^2(x-y)}\right) + \frac{1}{2a^2(x-y)^2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2a^2(x-y)}\right) \cdot I_{\beta-1, \beta}\left(\frac{1}{2a^2(x-y)}\right). \quad (1.4.4)$$

Ескерту 1.4.2. Егер (1.4.1)-ші теңдеудің шешімі табылатын болса, онда (1.3.2)-ші теңдеудің шешімін сипаттамалық теңдеуді регуляризация әдісімен шешу арқылы аламыз [79].

1.5 Біртекті сипаттамалық теңдеуді шешу

(1.4.3)-ші теңдеу екінші типтегі Вольтерр теңдеулерінен түбегейлі ерекшеленеді, олар үшін шешім бар және жалғыз. Сәйкес келесі біртекті теңдеуді шешу жалпы жағдайда тривиальды емес болуы да мүмкін:

$$\mu_2(y) - \int_y^{\infty} M_-(y-x) \mu_2(x) dx = 0, \quad (1.5.1)$$

(1.5.1)-ші интегралдық теңдеудің меншікті функциялары p параметріне қатысты алғанда келесі трансценденттік теңдеудің [76, p. 569] түбірлерімен анықталады:

$$\widehat{M}_-(-p) = \int_0^{\infty} M_-(z) \cdot e^{pz} dz = 1, \quad \text{Re } p < 0 \quad (1.5.2)$$

Лаплас түрлендіруін (1.5.1) теңдеуге қолдана отырып алатынымыз:

$$\widehat{\mu}_2(p) \cdot [1 - \widehat{M}_-(-p)] = 0, \quad \text{Re } p < 0. \quad (1.5.3)$$

мұнда $\widehat{M}_-(-p)$ функциясының көрінісін табу үшін:

1) (29.169) формуласын [77, с. 350];

2) егер $f(t) \hat{=} \hat{f}(p)$ болса, онда $\frac{1}{t} f(t) \hat{=} \int_p^{\infty} \hat{f}(p) dp$ [80] қасиетін

қолданамыз. Онда:

$$\begin{aligned} \widehat{M}_-(-p) &= 2(1 - 2\beta) K_{\beta} \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) I_{\beta} \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) + \\ &+ \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^p \left[K_{\beta-1} \left(\frac{\sqrt{-q}}{a} \right) I_{\beta-1} \left(\frac{\sqrt{-q}}{a} \right) - K_{\beta} \left(\frac{\sqrt{-q}}{a} \right) I_{\beta} \left(\frac{\sqrt{-q}}{a} \right) \right] dq. \end{aligned}$$

Соңғы интегралды есептеу үшін (1.12.4.3) формуласын [81] қолданамыз:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^p \left[K_{\beta-1} \left(\frac{\sqrt{-q}}{a} \right) I_{\beta-1} \left(\frac{\sqrt{-q}}{a} \right) - K_{\beta} \left(\frac{\sqrt{-q}}{a} \right) I_{\beta} \left(\frac{\sqrt{-q}}{a} \right) \right] dq = \\ &= \left\| \begin{array}{l} \frac{\sqrt{-q}}{a} = z; \quad q = -a^2 z^2 \\ dq = -2a^2 z dz \end{array} \right\| = 2 \int_{\frac{\sqrt{-p}}{a}}^{\infty} z [K_{\beta-1}(z) I_{\beta-1}(z) - K_{\beta}(z) I_{\beta}(z)] dz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z^2 \left[\left(1 + \frac{(\beta - 1)^2}{z^2} \right) I_{\beta-1}(z) K_{\beta-1}(z) - I'_{\beta-1}(z) K'_{\beta-1}(z) \right] \Big|_{\frac{\sqrt{-p}}{a}}^{\infty} - \\
&\quad - z^2 \left[\left(1 + \frac{\beta^2}{z^2} \right) I_{\beta}(z) K_{\beta}(z) - I'_{\beta}(z) K'_{\beta}(z) \right] \Big|_{\frac{\sqrt{-p}}{a}}^{\infty} = \\
&= z^2 \left[\left(1 + \frac{(\beta - 1)^2}{z^2} \right) I_{\beta-1}(z) K_{\beta-1}(z) - \right. \\
&\quad \left. - \left\{ I_{\beta}(z) + \frac{\beta - 1}{z} I_{\beta-1}(z) \right\} \left\{ -K_{\beta}(z) + \frac{\beta - 1}{z} K_{\beta-1}(z) \right\} \right] \Big|_{\frac{\sqrt{-p}}{a}}^{\infty} - \\
&\quad - z^2 \left[\left(1 + \frac{\beta^2}{z^2} \right) I_{\beta}(z) K_{\beta}(z) - \left\{ I_{\beta-1}(z) - \frac{\beta}{z} I_{\beta}(z) \right\} \left\{ -K_{\beta-1}(z) - \frac{\beta}{z} K_{\beta}(z) \right\} \right] \Big|_{\frac{\sqrt{-p}}{a}}^{\infty} = \\
&\quad = [(z^2 + (\beta - 1)^2) I_{\beta-1}(z) K_{\beta-1}(z) + z^2 I_{\beta}(z) K_{\beta}(z) - \\
&\quad - z(\beta - 1) I_{\beta}(z) K_{\beta-1}(z) + z(\beta - 1) I_{\beta-1}(z) K_{\beta}(z) - (\beta - 1)^2 I_{\beta-1}(z) K_{\beta-1}(z)] \Big|_{\frac{\sqrt{-p}}{a}}^{\infty} - \\
&\quad - [(z^2 + \beta^2) I_{\beta}(z) K_{\beta}(z) + z^2 I_{\beta-1}(z) K_{\beta-1}(z) + z\beta I_{\beta-1}(z) K_{\beta}(z) - \\
&\quad - z\beta I_{\beta}(z) K_{\beta-1}(z) - \beta^2 I_{\beta}(z) K_{\beta}(z)] \Big|_{\frac{\sqrt{-p}}{a}}^{\infty} = \\
&\quad = [z I_{\beta}(z) K_{\beta-1}(z) - z I_{\beta-1}(z) K_{\beta}(z)] \Big|_{\frac{\sqrt{-p}}{a}}^{\infty} = \\
&\quad = \left[2z I_{\beta}(z) K_{\beta-1}(z) - \left(z I_{\beta}(z) K_{\beta-1}(z) + z I_{\beta-1}(z) K_{\beta}(z) \right) \right] \Big|_{\frac{\sqrt{-p}}{a}}^{\infty} = \\
&\quad = 2z I_{\beta}(z) K_{\beta-1}(z) \Big|_{\frac{\sqrt{-p}}{a}}^{\infty} = 1 - 2 \frac{\sqrt{-p}}{a} I_{\beta} \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) K_{\beta-1} \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right),
\end{aligned}$$

мұнда келесі қатынастарды қолдандық:

$$\begin{aligned}
K'_{\beta}(z) &= -K_{\beta-1}(z) - \frac{\beta}{z} K_{\beta}(z), \\
K'_{\beta-1}(z) &= -K_{\beta}(z) + \frac{\beta - 1}{z} K_{\beta-1}(z), \\
I'_{\beta}(z) &= I_{\beta-1}(z) - \frac{\beta}{z} I_{\beta}(z), \\
I'_{\beta-1}(z) &= I_{\beta}(z) + \frac{\beta - 1}{z} I_{\beta-1}(z).
\end{aligned}$$

Онда (1.5.2)-ші теңдеу төмендегі түрге келеді:

$$2I_{\beta} \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) \left[(1 - 2\beta) K_{\beta} \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) - \frac{\sqrt{-p}}{a} K_{\beta-1} \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) \right] = 0, \quad \operatorname{Re} p < 0,$$

мұнда $K_\beta\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)$ – екінші текті β ретті Бессельдің модификацияланған функциясы (Макдональд функциясы).

$I_\beta\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) = 0$ деп болжайық. Жорамал аргументті Бессель функциясының анықтамасына сәйкес $I_\beta\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}\beta i} J_\beta\left(\frac{i\sqrt{-p}}{a}\right)$, мұндағы $J_\beta\left(\frac{i\sqrt{-p}}{a}\right)$ – Бессель функциясы – бірінші ретті цилиндрлік функция. Кез келген нақты β үшін $J_\beta(z)$ функциясының шексіз көп нақты түбірлері бар; $\beta > -1$ болғанда оның барлық түбірлері нақты және $iz_k = \alpha_k$, $z_k = -i\alpha_k$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ [82] тең, яғни біздің жағдайда $\frac{i\sqrt{-p_k}}{a} = \alpha_k$, мұндағы $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Бұдан $p_k = a^2 \alpha_k^2$ болады, ол $\text{Re} p < 0$ шартына қарама-қайшы.

Ендеше $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ болғанда келесі теңдеудің түбірлерін табу керек:

$$(1 - 2\beta)K_\beta\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) - \frac{\sqrt{-p}}{a}K_{\beta-1}\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) = 0, \quad \text{Re} p < 0. \quad (1.5.4)$$

$\frac{1}{2} < \beta < 1$ болғанда берілген теңдеудің түбірлері болмайтындығын айта кеткен жөн. Ол дегеніміз, (1.5.3) теңдеуінде

$$1 - \widehat{M}_-(-p) \neq 0,$$

бұдан $\widehat{\mu}_2(p) = 0$ екендігі шығады. Яғни (1.5.1)-ші біртекті интегралдық теңдеудің осы жағдайда тек нөлдік шешімі бар болады.

$0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ болғанда (1.5.4)-ші теңдеудің жалғыз нақты түбірі $p_0 \leq 0$ болады және $p_0 = 0$ түбірі $\beta = \frac{1}{2}$ жағдайына сәйкес келеді. Ал $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғанда түбір $p_0 < 0$. Бұл (1.5.1)-ші теңдеудің $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғанда нөлдік емес шешімі $\mu_2(y) = Ce^{p_0 y}$, $p_0 < 0$ болатындығын білдіреді. Онда (1.4.2)-ші бұрынғы айнымалыларға қайта оралып, (1.4.1)-ші теңдеуге сәйкес келетін біртекті интегралдық теңдеудің $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғанда меншікті функциясының бар екендігін аламыз:

$$\mu^{(0)}(t) = C \cdot \frac{1}{t^{1-\beta}} \cdot e^{\frac{p_0}{t} - \frac{t}{4a^2}}, \quad p_0 < 0, \quad C = \text{const.}$$

Ескерту 1.5.1. $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғанда $\forall t \in (0, \infty)$ үшін $\mu^{(0)}(t)$ меншікті функциясы шектелген. Сәйкесінше $\beta = \frac{1}{2}$ болғанда меншікті функцияның түрі келесідей болады:

$$\mu^{(0)}(t) = C \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{t}{4a^2}}, \quad C = \text{const.}$$

1.6 Біртекті сипаттамалық интегралдық теңдеуді шешу. Резольвентаны құру

(1.4.3) теңдеуді Лаплас түрлендіруін тікелей қолдану арқылы шешу мүмкін емес, себебі мұнда үйірткі теоремасы (теорема о свертке) қолданылмайды. Модельдік шешімдер әдісін қолданамыз [76, р. 561]. Онда (1.4.3) теңдеудің шешімі келесідей болады:

$$\varphi_1(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\widehat{\Phi}_1(p)}{1 - \widehat{M}_-(-p)} dp = \Phi_1(y) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \widehat{R}_-(-p) \widehat{\Phi}_1(p) e^{pz} dp,$$

мұнда

$$\widehat{\Phi}_1(p) = \int_0^{\infty} \Phi_1(y) e^{-py} dy, \quad \widehat{R}_-(-p) = \frac{\widehat{M}_-(-p)}{1 - \widehat{M}_-(-p)}, \quad \text{Re } p < 0;$$

$$\widehat{M}_-(-p) = 1 + 2I_\beta \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) \left[(1 - 2\beta) K_\beta \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) - \frac{\sqrt{-p}}{a} K_{\beta-1} \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) \right], \quad \text{Re } p < 0.$$

Егер $\widehat{R}_-(-p) \equiv R_-(y)$ болса, онда (1.4.3) теңдеудің шешімі келесі түрде болады:

$$\varphi_1(y) = \Phi_1(y) + \frac{1}{2\pi i} \int_y^{\infty} R_-(y-x) \Phi_1(x) dx. \quad (1.6.1)$$

$R_-(y)$ резольвентасын табу үшін оның бейнесін келесі түрде жазамыз:

$$\widehat{R}_- \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) = \frac{1 - 2I_\beta \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) \left[\frac{\sqrt{-p}}{a} K_{\beta-1} \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) - (1 - 2\beta) K_\beta \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) \right]}{2I_\beta \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) \left[\frac{\sqrt{-p}}{a} K_{\beta-1} \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) - (1 - 2\beta) K_\beta \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) \right]}, \quad \text{Re } p < 0$$

және [80, с. 191] қасиеттерін қолданамыз:

1. Егер $\varphi(t) \equiv \widehat{\varphi}(p)$ болса, онда

$$\varphi(\alpha t) \equiv \frac{1}{\alpha} \widehat{\varphi} \left(\frac{p}{\alpha} \right), \quad \alpha > 0.$$

2. Егер $\widehat{\varphi}(p) \equiv \varphi(t)$ болса, онда

$$\hat{\varphi}(\sqrt{p}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \tau \cdot e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \varphi(\tau) d\tau.$$

Қолайлы болу үшін $\frac{\sqrt{-p}}{a} = z$ белгілеуін енгіземіз және

$$\widehat{R}^*(z) = \frac{1 - 2I_{\beta}(z)[zK_{\beta-1}(z) - (1 - 2\beta)K_{\beta}(z)]}{2I_{\beta}(z)[zK_{\beta-1}(z) - (1 - 2\beta)K_{\beta}(z)]}$$

өрнегінің түпнұсқасын табамыз. [82, с. 519] сәйкес:

$$\widehat{R}^*(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \doteq \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(z_k)}{B'(z_k)} e^{-z_k y},$$

мұнда z_k

$$B(z) = 2I_{\beta}(z)[zK_{\beta-1}(z) - (1 - 2\beta)K_{\beta}(z)]$$

функциясының нөлдері.

1. Айталық $y_{\beta}(z) = zK_{\beta-1}(z) - (1 - 2\beta)K_{\beta}(z) = 0$. Бұл теңдеудің, осыған дейін айтылғандай, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғанда жалғыз z_0 түбірі бар болады.

2. Айталық $I_{\beta}(z) = e^{-\frac{\pi}{2}\beta i} J_{\beta}(iz) = 0$. Ендеше, $iz_k = \alpha_k$ немесе $z_k = -i\alpha_k$, мұнда $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

Онда:

$$\widehat{R}^*(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \doteq \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(z_k)}{B'(z_k)} e^{-z_k y} = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{A(z_k)}{B'(z_k)} e^{-z_k y} + \frac{A(z_0)}{B'(z_0)} e^{-z_0 y} = R_-(y),$$

мұнда

$$B(z) = 2I_{\beta}(z)[zK_{\beta-1}(z) - (1 - 2\beta)K_{\beta}(z)]$$

$$B'(z) = 2I_{\beta-1}(z)[zK_{\beta-1}(z) - (1 - 2\beta)K_{\beta}(z)] + 2(1 - 2\beta)I_{\beta}(z)K_{\beta-1}(z) + \left(\frac{4\beta(1 - 2\beta)}{z} - 2z \right) I_{\beta}(z)K_{\beta}(z)$$

Осылайша $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғанда алатынымыз:

$$R_{-}^{*}(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{-z_k y}}{2I_{\beta-1}(z_k)[z_k K_{\beta-1}(z_k) - (1-2\beta)K_{\beta}(z_k)]} + \frac{e^{-z_0 y}}{2I_{\beta}(z_0)K_{\beta-1}(z_0) \left[1 - \frac{1}{1-2\beta} z_0^2\right]}. \quad (1.6.2)$$

Келесі белгілеулерді енгіземіз:

$$A_{\beta,k} = \frac{1}{2I_{\beta-1}(z_k)[z_k K_{\beta-1}(z_k) - (1-2\beta)K_{\beta}(z_k)]},$$

$$A_{\beta,0} = \frac{1}{2I_{\beta}(z_0)K_{\beta-1}(z_0) \left[1 - \frac{1}{1-2\beta} z_0^2\right]}.$$

(1.6.2) теңдігінен, сондай-ақ бейненің 1. және 2. қасиеттерінен:

$$\widehat{R}_{-} \left(\frac{\sqrt{-p}}{a} \right) \doteq R_{-}(y) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}y^{\frac{3}{2}}} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} A_{\beta,k} \cdot \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{4y} - i a^2 \alpha_k x} dx +$$

$$+ \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}y^{\frac{3}{2}}} \cdot A_{\beta,0} \cdot \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{4y} - z_0 a^2 x} dx.$$

Лемма 1.6.1. $R_{-}(y)$ резольвента үшін келесі бағалау әділ:

$$R_{-}(y) \leq \frac{A}{\sqrt{y}}$$

Дәлелдеуі.

$$R_{-}(y) \leq \left| \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}y^{\frac{3}{2}}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} A_{\beta,k} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{4y} - i a^2 \alpha_k x} dx + A_{\beta,0} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{4y} - z_0 a^2 x} dx \right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{a^2}{2\sqrt{y}} \cdot \left\{ \left| \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} A_{\beta,k} \right| + |A_{\beta,0}| \right\}.$$

$|A_{\beta,0}| = C_{\beta} = \text{const}$ болғандықтан, $|\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} A_{\beta,k}|$ қосындысын бағалайық:

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} A_{\beta,k} \right| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{2I_{\beta-1}(z_k)[z_k K_{\beta-1}(z_k) - (1-2\beta)K_{\beta}(z_k)]} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \begin{array}{l} K_\beta(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi}{2}\beta i} H_\beta^{(1)}(iz); \quad I_\beta(z) = e^{-\frac{\pi}{2}\beta i} J_\beta(iz); \\ z_k = -i\alpha_k; \quad z_{-k} = i\alpha_k; \\ J_\beta(-z) = e^{\beta\pi i} J_\beta(z); \quad H_\beta^{(1)}(-z) = -e^{-\beta\pi i} H_\beta^{(2)}(z) \end{array} \right\| = \\
&= \frac{1}{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{J_{\beta-1}(\alpha_k) [\alpha_k H_{\beta-1}^{(1)}(\alpha_k) + (1-2\beta) H_\beta^{(1)}(\alpha_k)]} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{e^{(\beta-1)\pi i} J_{\beta-1}(\alpha_k) [-\alpha_k e^{-(\beta-1)\pi i} H_{\beta-1}^{(2)}(\alpha_k) + (1-2\beta) e^{-\beta\pi i} H_\beta^{(2)}(\alpha_k)]} \right) \right| = \\
&= \left\| \begin{array}{l} H_\beta^{(1)}(z) = J_\beta(z) + iN_\beta(z); \quad H_\beta^{(2)}(z) = J_\beta(z) - iN_\beta(z) \\ J_\beta(\alpha_k) = 0 \end{array} \right\| = \\
&= \frac{2}{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(\alpha_k J_{\beta-1}(\alpha_k))^2 + (\alpha_k N_{\beta-1}(\alpha_k))^2 + 2\alpha_k(1-2\beta)N_{\beta-1}(\alpha_k)N_\beta(\alpha_k) + ((1-2\beta)N_\beta(\alpha_k))^2} \right| \\
&\leq \frac{2}{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(\alpha_k J_{\beta-1}(\alpha_k))^2 + (\alpha_k N_{\beta-1}(\alpha_k))^2} \right| = \frac{2}{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k H_{\beta-1}^{(1)}(\alpha_k) H_{\beta-1}^{(2)}(\alpha_k)} \right| \leq \\
&\leq \frac{2}{\pi} \left| \int_{\alpha_1}^{\infty} \frac{d(\alpha_n)}{\alpha_k \cdot H_{\beta-1}^{(1)}(\alpha_k) \cdot H_{\beta-1}^{(2)}(\alpha_k)} \right| = \|(1.10.3.3)[79, 42 \text{ б.}]\| = \\
&= \frac{2}{\pi} \left| -\frac{\pi}{4i} \cdot \ln \frac{H_{\beta-1}^{(2)}(\alpha_k)}{H_{\beta-1\nu}^{(1)}(\alpha_k)} \right|_{\alpha_1}^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot \left| \left(\ln \left| \frac{H_{\beta-1}^{(2)}(\alpha_k)}{H_{\beta-1}^{(1)}(\alpha_k)} \right| + i \cdot \arg \frac{H_{\beta-1}^{(2)}(\alpha_k)}{H_{\beta-1}^{(1)}(\alpha_k)} \right) \right|_{\alpha_1}^{\infty} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left| \arg H_{\beta-1}^{(2)}(\alpha_k) - \arg H_{\beta-1\nu}^{(1)}(\alpha_k) \right| \leq \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Осылайша алатынымыз:

$$R_-(y) \leq \frac{a^2}{2\sqrt{y}} \cdot \left\{ \left| \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} A_{\beta,k} \right| + |A_{\beta,0}| \right\} \leq \frac{a^2(\pi + 2C_\beta)}{4\sqrt{y}} = \frac{C_\beta^{(1)}}{\sqrt{y}}, C_\beta^{(1)} = \text{const.}$$

$$R_-(y) \leq \frac{a^2}{2\sqrt{y}} \cdot \left| \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} A_{\beta,k} \right| \leq \frac{a^2\pi}{4\sqrt{y}}$$

Лемма дәлелденді.

1.7 Сипаттамалық теңдеуді шешу

Біз төмендегі теңдеудің шешімін тапқан болатынбыз:

$$\mu_2(y) - \int_y^{\infty} M_-(y-x) \mu_2(x) dx = \Phi_1(y),$$

ол $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғанда келесі түрде болады:

$$\mu_2(y) = \Phi_1(y) + \int_y^{\infty} R_-(x-y) \Phi_1(x) dx + C e^{p_0 y},$$

Ескі айнымалыларға орала отырып, (1.6.1) сипаттамалық теңдеудің шешімін келесі түрде жазамыз:

$$\mu_1(t) = \Phi(t) + \int_0^t \frac{R_-(t,\tau)}{\tau^2} \Phi(\tau) d\tau + C e^{\frac{p_0}{t}}.$$

Соңғы интегралдың жинақталуы үшін

$$\Phi_2(t) = \frac{1}{t} \cdot \Phi(t) \in L_{\infty}(0, \infty)$$

болуы қажет. Онда (1.6.1) сипаттамалық теңдеудің шешімін келесі түрде жазамыз:

$$\mu_1(t) = t \cdot \Phi_2(t) + \int_0^t \tilde{R}(t,\tau) \cdot \Phi_2(\tau) d\tau + C e^{\frac{p_0}{t}}, \quad (1.7.1)$$

мұнда

$$\tilde{R}(t,\tau) \leq C \cdot \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\tau} \cdot \sqrt{t-\tau}}. \quad (1.7.2)$$

Соңғы теңсіздіктің дұрыстығы 1.6.1 леммадан туындайды.

1.8 Бастапқы интегралдық теңдеуді шешу. Карлеман-Векуа регуляризация әдісі

Теорема 1.8.1. *Кез келген $t^{-\beta} e^{\frac{t}{4a^2}} \cdot F(t) \in L_{\infty}(0, \infty)$ ($0 < \beta < \frac{1}{2}$) функциясы үшін (1.3.2)-ші бастапқы интегралдық теңдеудің*

$$t^{-\beta} \exp\left[\frac{t}{4a^2}\right] \mu(t) \in L_{\infty}(0, \infty), \quad \left(0 < \beta < \frac{1}{2}\right) \quad (1.8.1)$$

функциялар класында жалғыз гана шешімі бар болады, ол тізбектеп жуықтау әдісімен табылады.

Дәлелдеуі.

(1.3.2)-ші бастапқы интегралдық теңдеуді келесі түрде қайтадан жазайық:

$$\mu_1(t) - \int_0^t N_1(t, \tau) \mu_1(\tau) d\tau = F_1(t) + \int_0^t N_2(t, \tau) \mu_1(\tau) d\tau, \quad (1.8.2)$$

(1.8.2) теңдеудің оң жағын уақытша белгісіз деп есептеп, оны келесі түрде жазып аламыз:

$$\begin{aligned} [1 - \mathcal{M}] \mu_2(t) &\equiv \mu_2(t) - \int_0^t M(t, \tau) \mu_2(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{t} F(t) + \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{R}(t, \tau) \cdot \frac{F(\tau)}{\tau} d\tau + \frac{C}{t} e^{\frac{p_0}{t}}, \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

мұнда

$$\mu_2(t) = \frac{1}{t} \mu_1(t), \quad M(t, \tau) = \frac{\tau}{t} N_2(t, \tau) + \frac{\tau}{t} \cdot \int_{\tau}^t \tilde{R}(t, \xi) \cdot \frac{N_2(\xi, \tau)}{\xi} d\xi.$$

$M(t, \tau)$ ядросы үшін

$$M(t, \tau) \leq \frac{\tilde{D}_1}{\sqrt{t - \tau}} + \tilde{D}_2, \quad \tilde{D}_1, \tilde{D}_2 = \text{const}$$

бағалауы әділ. Осылайша, біз (1.8.3)-ші теңдеу әрбір $C \neq 0$ үшін жалғыз шешімге ие болатынын көрсеттік

$$\mu_2(t) = \mu_{2,\text{part}}(t) + C \mu_{2,\text{hom}}(t),$$

мұнда

$$\mu_{2,\text{hom}}(t) = [1 - \mathcal{M}]^{-1} \mu^{(0)}(t), \quad \mu_2(t) = t^{-\beta} e^{\frac{t}{4a^2}} \mu(t).$$

Осы жағдайда, егер $F(t) = 0$, онда (1.8.3)-ші интегралдық теңдеудің $\mu_2^{(0)}(t) = C \cdot [1 - \mathcal{M}]^{-1} \mu^{(0)}(t)$ шешімі болады. Теорема дәлелденді.

1.9 (1.1.3)-(1.1.5) шеттік есептің шешімі

Теорема 1.9.1. Егер $g_1(t) \in L_\infty(0, \infty)$, $t^{-\beta}g_2(t) \in L_\infty(0, \infty)$ ($0 < \beta < \frac{1}{2}$) шарттары орындалса, онда (1.1.3)-(1.1.5) шеттік есептің шешімі $u(r, t) \in L_\infty(G)$ және келесі формула арқылы анықталады:

$$u(r, t) = \sum_{i=1}^3 u_i(r, t) + \widetilde{g}_1(r, t),$$

мұнда

$$\begin{aligned} u_1(r, t) &= \int_0^t \frac{r^\beta \tau^{1-\beta} (r - \tau)}{4a^4(t - \tau)^2} \cdot e^{-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_\beta \left(\frac{r\tau}{2a^2(t - \tau)} \right) \mu(\tau) d\tau, \\ u_2(r, t) &= \int_0^t \frac{r^{\beta+1} \tau^{1-\beta}}{4a^4(t - \tau)^2} \cdot e^{-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{r\tau}{2a^2(t - \tau)} \right) \mu(\tau) d\tau, \\ u_3(r, t) &= \int_0^t \frac{r^\beta (1 - 2\beta)}{2a^2(t - \tau) \tau^\beta} \cdot e^{-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_\beta \left(\frac{r\tau}{2a^2(t - \tau)} \right) \mu(\tau) d\tau, \\ \widetilde{g}_1(r, t) &= \frac{1}{(2a^2)^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{r^{2\beta}}{(t - \tau)^{\beta+1}} \cdot \exp \left[-\frac{r^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \cdot g_1(\tau) d\tau. \\ \mu(t) &= \mu_{\text{part}}(t) + C\mu_{\text{hom}}(t). \end{aligned}$$

Дәлелдеуі. Айталық $\mu(t) \in L_\infty(0, \infty)$ болсын. $u(r, t)$ есебінің шешімі α -ның қандай мәндерінде $u(r, t) \in L_\infty(G)$ шартын қанағаттандыратынын анықтайық. Алдымен бірінші қосылғышты бағалаймыз.

$$\begin{aligned} u_1(r, t) &= \int_0^t \frac{r^\beta \tau^{1-\beta} (r - \tau)}{4a^4(t - \tau)^2} \cdot e^{-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_\beta \left(\frac{r\tau}{2a^2(t - \tau)} \right) \mu(\tau) d\tau \leq \\ &\leq C \int_0^t \frac{r^\beta \tau^{1-\beta} (t - \tau)}{4a^4(t - \tau)^2} \cdot e^{-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_\beta \left(\frac{r\tau}{2a^2(t - \tau)} \right) d\tau = \\ &= C \int_0^t \frac{r^\beta \tau^{1-\beta}}{4a^4(t - \tau)} \cdot e^{-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_\beta \left(\frac{r\tau}{2a^2(t - \tau)} \right) \mu(\tau) d\tau = \\ &= \left\| \left\| \begin{aligned} \xi &= \frac{r\tau}{2a^2(t - \tau)}; & \tau &= \frac{2a^2 t \xi}{r + 2a^2 \xi}; \\ t - \tau &= t \frac{rt}{r + 2a^2 \xi}; & d\tau &= \frac{2a^2 rt}{(r + 2a^2 \xi)^2} d\xi \end{aligned} \right. \right\| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C \int_0^{\infty} \frac{r^{\beta}}{4a^4} \cdot \left[\frac{2a^2 t \xi}{r + 2a^2 \xi} \right]^{1-\beta} \cdot \frac{r + 2a^2 \xi}{rt} \cdot \frac{2a^2 rt}{(r + 2a^2 \xi)^2} \cdot e^{-\xi} I_{\beta}(\xi) d\xi = \\
&= C \int_0^{\infty} \frac{r^{\beta}}{2a^2} \cdot \frac{[2a^2 t \xi]^{1-\beta}}{[r + 2a^2 \xi]^{2-\beta}} \cdot e^{-\xi} I_{\beta}(\xi) d\xi \leq \frac{Cr^{\beta} t^{1-\beta}}{2a^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \cdot e^{-\xi} I_{\beta}(\xi) d\xi = \\
&= \frac{Cr^{\beta} t^{1-\beta}}{2a^2} \cdot \Gamma \left[\beta, \frac{1}{2} \right] = \frac{C\sqrt{\pi}}{2a^2 \beta} \cdot r^{\beta} t^{1-\beta} \leq \widetilde{C}_1 = \text{const}, \quad \forall (r, t) \in Q.
\end{aligned}$$

Екінші қосылғышты бағалайық.

$$\begin{aligned}
u_2(r, t) &= \int_0^t \frac{r^{\beta+1} \tau^{1-\beta}}{4a^4 (t-\tau)^2} \cdot e^{-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)} \right) \mu(\tau) d\tau \leq \\
&\leq C \int_0^t \frac{r^{\beta+1} \tau^{1-\beta}}{4a^4 (t-\tau)^2} \cdot e^{-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)} \right) d\tau = \\
&= \left\| \begin{array}{l} \xi = \frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}; \quad \tau = \frac{2a^2 t \xi}{r + 2a^2 \xi}; \\ t - \tau = t \frac{rt}{r + 2a^2 \xi}; \quad d\tau = \frac{2a^2 rt}{(r + 2a^2 \xi)^2} d\xi \end{array} \right\| = \\
&= C \int_0^{\infty} \frac{r^{\beta+1}}{4a^4} \cdot \left[\frac{2a^2 t \xi}{r + 2a^2 \xi} \right]^{1-\beta} \cdot \left[\frac{r + 2a^2 \xi}{rt} \right]^2 \cdot \frac{2a^2 rt}{(r + 2a^2 \xi)^2} e^{-\xi} I_{\beta-1, \beta}(\xi) d\xi = \\
&= \frac{C}{2a^2} \cdot \frac{r^{\beta}}{t^{\beta}} \int_0^{\infty} \left[\frac{\xi}{\frac{r}{2a^2} + \xi} \right]^{1-\beta} \cdot e^{-\xi} I_{\beta-1, \beta}(\xi) d\xi \leq \\
&\leq C_1 \int_0^{\infty} e^{-\xi} I_{\beta-1, \beta}(\xi) d\xi \leq \widetilde{C}_2 = \text{const}, \quad \forall (r, t) \in Q.
\end{aligned}$$

Үшінші қосылғышты бағалайық.

$$\begin{aligned}
u_3(r, t) &= \int_0^t \frac{r^{\beta}(1-2\beta)}{2a^2(t-\tau)\tau^{\beta}} \cdot e^{-\frac{(r-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot e^{-\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}} \cdot I_{\beta} \left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)} \right) \mu(\tau) d\tau = \\
&= \left\| \begin{array}{l} \xi = \frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}; \quad \tau = \frac{2a^2 t \xi}{r + 2a^2 \xi}; \\ t - \tau = t \frac{rt}{r + 2a^2 \xi}; \quad d\tau = \frac{2a^2 rt}{(r + 2a^2 \xi)^2} d\xi \end{array} \right\| =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{Cr^\beta(1-2\beta)t^{-\beta}}{2a^2} \int_0^\infty \frac{\xi^{-\beta}}{\left(\frac{r}{2a^2} + \xi\right)^{1-\beta}} \cdot e^{-\xi} I_\beta(\xi) d\xi \leq \\
&\leq \frac{Cr^\beta(1-2\beta)t^{-\beta}}{2a^2} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \cdot e^{-\xi} I_\beta(\xi) d\xi = \frac{Cr^\beta(1-2\beta)t^{-\beta}}{2a^2} \cdot \Gamma\left[\beta, \frac{1}{2}\right] = \\
&= \frac{C(1-2\beta)\sqrt{\pi}}{2a^2\beta} \cdot \left(\frac{r}{t}\right)^\beta \leq \frac{C(1-2\beta)\sqrt{\pi}}{2a^2\beta} = \widetilde{C}_3 = \text{const}, \quad \forall (r, t) \in Q.
\end{aligned}$$

Төртінші қосылғыш үшін бағалау 1.3.1-ші ескертуден туындайды. Демек, негізгі нәтиженің әділдігі, яғни 1.9.1 теоремасының дұрыстығы шығады.

2 УАҚЫТТЫҢ БАСТАПҚЫ СӘТІНДЕ НҮКТЕГЕ ДЕЙІН ЖОЙЫЛАТЫН КАНОНДЫҚ ЕМЕС ОБЛЫСТАҒЫ ПАРАБОЛАЛЫҚ ЕСЕП

Берілген бөлімде канондық емес облыстағы жылу өткізгіштіктің екі өлшемді теңдеуі үшін шекарасы $x = t^\omega$, $\omega > \frac{1}{2}$ дәрежелік заңдылық бойынша өзгертін шеттік есеп зерттеледі. Есептің шешімдер облысы уақыттың бастапқы сәтінде болмайды, яғни ол нүктеге дейін жойылады. Жалпыланған жылу потенциалдарының әдісімен есеп екінші текті псевдо-Вольтерр типті интегралдық теңдеуге түрлендіріледі. Алынған интегралдық теңдеу Вольтерр типті классикалық интегралдық теңдеулерінен түбегейлі ерекшеленеді, себебі сәйкес интегралдық оператордың нормасы бірге тең және оған тізбектеп жуықтаудың классикалық әдісі қолданылмайды, сонымен қатар сәйкес біртекті интегралдық теңдеудің нөлдік емес шешімі бар [83].

2.1 Есептің қойылымы

$\Gamma = \left\{ (x, y, t) \mid \sqrt{x^2 + y^2} = t^\omega, t > 0, \omega > \frac{1}{2} \right\}$ бүйір бетімен берілген $Q = \left\{ (x, y, t) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < t^\omega, t > 0, \omega > \frac{1}{2} \right\}$ облысында келесі теңдеу үшін шеттік есеп қарастырылады:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - a^2 \beta \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f(x, y, t) \quad (2.1.1)$$

$$u(x, y, t)|_\Gamma = g(x, y, t) \quad (2.1.2)$$

мұнда $g(x, y, t)$ – берілген функция;

$0 < \beta < 1$. Q облысындағы (2.1.1)-ші теңдеуді және (2.1.2)-ші шеттік шартты қанағаттандыратын $u(x, y, t)$ функциясын табу керек.

Уақытқа байланысты өзгертін облыстарда пайда болатын шеттік есептердің мұндай түрлері өзекті болып табылады. Мысалы, қозғалыс жылдамдығы координаттарға тәуелді болатын жылжымалы ортадағы жылу беру процесін сипаттау кезінде; байланыс нүктесіндегі катод облысындағы доғаның осьтік қимасының тартылу әсерін ескере отырып, жоғары тоқты өшіру аппараттарының электр доғасындағы жылу-физикалық процестерді математикалық модельдеу кезінде. Олар сондай-ақ металлургияда, кристалл өндірісінде, лазерлік технологияда және басқа салаларда жаңа технологияларды жасауда қолданылады.

(2.1.1)-(2.1.2) есебінде цилиндрлік координаттарға ауысамыз.

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = r;$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(r, t)}{\partial t}.$$

Бірінші туындыларды табамыз.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}; & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \varphi; \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \varphi; \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \\ \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x} \end{cases} \end{aligned}$$

немесе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{y \cos^2 \varphi}{x^2} = -\frac{r \sin \varphi \cos^2 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\cos^2 \varphi}{x} = \frac{\cos^2 \varphi}{r \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi}{r}. \end{aligned}$$

Ендеше,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r},$$

одан шығатыны:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{xr^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{yr^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x^2 - y^2}{xyr^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Екінші туындыларды табамыз.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r^2}; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \sin \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}$$

екендігін ескерсек:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \cos^2 \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} - \\ &- \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r^2}. \end{aligned}$$

Жоғарыдағыға ұқсас:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{r^2}. \end{aligned}$$

Осы тік симметрия шартының орындалуын болжай отырып, алатынымыз:

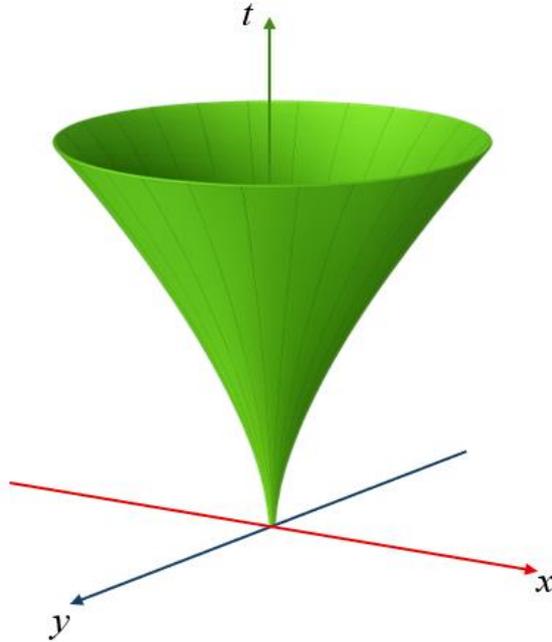
$$\begin{aligned} a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - a^2 \beta \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2\beta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \\ &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1-2\beta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Онда $Q = \left\{ (r, t) \mid 0 < r < t^\omega, t > 0, \omega > \frac{1}{2} \right\}$ облысында (5-сурет) келесі шеттік есепті аламыз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{1-2\beta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (2.1.3)$$

$$u(r, t)|_{r=0} = g_1(t), \quad t > 0 \quad (2.1.4)$$

$$u(r, t)|_{r=t^\omega} = g_2(t), \quad t > 0. \quad (2.1.5)$$



Сурет 5 – Q облысы

2.2 (2.1.3)-(2.1.5) шеттік есептің шешімін жылу потенциалдары көмегімен беру

(2.1.3) теңдеуі үшін фундаментальды шешім келесі функция:

$$G(r, \xi, t - \tau) = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta \cdot \xi^{1-\beta}}{t - \tau} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t - \tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t - \tau)}\right), \quad (2.2.1)$$

мұнда ξ – параметр;

$0 < \beta < 1$, $I_\beta(z)$ – бірінші текті β ретті Бессельдің модификацияланған функциясы (Инфельд функциясы). (2.1.3)-(2.1.5) есебінің шешімін қос қабатты жылу потенциалдарының қосындысы түрінде іздейміз:

$$u(r, t) = \int_0^t \frac{\partial G(r, \xi, t - \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\tau\omega} \mu(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial G(r, \xi, t - \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \nu(\tau) d\tau. \quad (2.2.2)$$

(2.2.2)-ші функцияны түрлендірейік, ол үшін $\frac{\partial G(r, \xi, t - \tau)}{\partial \xi}$ туындысын есептейміз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(r, \xi, t - \tau)}{\partial \xi} &= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta}{t - \tau} \cdot \frac{1 - \beta}{\xi^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t - \tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t - \tau)}\right) + \\ &+ \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta \cdot \xi^{1-\beta}}{t - \tau} \cdot \left(-\frac{\xi}{2a^2(t - \tau)}\right) \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t - \tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t - \tau)}\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta \cdot \xi^{1-\beta}}{t-\tau} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot \left(\frac{r}{2a^2(t-\tau)}\right) \times \\
& \times \left\{ I_{\beta-1}\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) - \frac{2a^2(t-\tau)\beta}{r\xi} I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) \right\} = \\
& = -\frac{1}{4a^4} \cdot \frac{r^\nu \cdot \xi^{2-\nu}}{(t-\tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) + \\
& + \frac{1}{4a^4} \cdot \frac{r^{\beta+1} \cdot \xi^{1-\beta}}{(t-\tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_{\beta-1}\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) + \\
& + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta(1-\beta)}{(t-\tau)\xi^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) - \\
& - \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{\beta r^\beta}{(t-\tau)\xi^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) = \\
& = \frac{1}{4a^4} \cdot \frac{r^\beta \cdot \xi^{1-\beta}}{(t-\tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot \left\{ r I_{\beta-1}\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) - \xi I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) \right\} + \\
& + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta(1-2\beta)}{(t-\tau)\xi^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right),
\end{aligned}$$

бұл жерде келесі қатынасты қолдандық:

$$I'_\beta(z) = I_{\beta-1}(z) - \frac{\beta}{z} I_\beta(z).$$

Әрі қарай $\left. \frac{\partial G(r, \xi, t-\tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$ табамыз:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial G(r, \xi, t-\tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} & = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4a^4} \cdot \frac{r^\beta \cdot \xi^{1-\beta}}{(t-\tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \times \right. \\
& \times \left\{ r I_{\beta-1}\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) - \xi I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) \right\} + \\
& \left. + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta(1-2\beta)}{(t-\tau)\xi^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) \right] = \\
& = \left\| \left\| \begin{aligned} I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) & \approx \frac{1}{2^\beta \Gamma(\beta+1)} \cdot \frac{r^\beta \xi^\beta}{[2a^2(t-\tau)]^\beta}; \\ I_{\beta-1}\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) & \approx \frac{1}{2^{\beta-1} \Gamma(\beta)} \cdot \frac{r^{\beta-1} \xi^{\beta-1}}{[2a^2(t-\tau)]^{\beta-1}} \end{aligned} \right\| \right\| = \\
& = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4a^4} \cdot \frac{r^{\beta+1} \cdot \xi^{1-\beta}}{(t-\tau)^2} \cdot \frac{1}{2^{\beta-1} \Gamma(\beta)} \cdot \frac{r^{\beta-1} \xi^{\beta-1}}{[2a^2(t-\tau)]^{\beta-1}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4a^4} \cdot \frac{r^\beta \cdot \xi^{2-\beta}}{(t-\tau)^2} \cdot \frac{1}{2^\beta \Gamma(\beta+1)} \cdot \frac{r^\beta \xi^\beta}{[2a^2(t-\tau)]^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] + \\
& + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta(1-2\beta)}{(t-\tau)\xi^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta \Gamma(\beta+1)} \cdot \frac{r^\beta \xi^\beta}{[2a^2(t-\tau)]^\beta} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \Bigg| = \\
& = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{r^{2\beta}}{2^{\beta-1}\Gamma(\beta)(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{(2a^2)^{\beta+2}} \cdot \frac{r^{2\beta} \cdot \xi^2}{2^\beta \Gamma(\beta+1)(t-\tau)^{\beta+2}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{(1-2\beta)r^{2\beta}}{2^\beta \Gamma(\beta+1)(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \right] = \\
& = \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{r^{2\beta}}{(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \left[\frac{2}{\Gamma(\beta)} + \frac{(1-2\beta)}{\Gamma(\beta+1)} \right] \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] = \\
& = \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{r^{2\beta}}{(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right].
\end{aligned}$$

Осылайша,

$$\left. \frac{\partial G(r, \xi, t - \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{r^{2\beta}}{2^\beta (t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right], \quad (2.2.3)$$

және

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial G(r, \xi, t - \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\tau^\omega} &= \frac{1}{4a^4} \cdot \frac{r^\beta \cdot \tau^{\omega(1-\beta)}}{(t-\tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \tau^{2\omega}}{4a^2(t-\tau)}\right] \times \\
& \times \left\{ r I_{\beta-1} \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right) - \tau^\omega I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right) \right\} + \\
& + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta(1-2\beta)}{(t-\tau)\tau^{\omega\beta}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \tau^{2\omega}}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right).
\end{aligned}$$

Соңғы теңдікті келесідей түрлендіреміз:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial G(r, \xi, t - \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\tau^\omega} &= \left\| \left\| r I_{\beta-1} - \tau^\omega I_\beta = (r I_{\beta-1} - r I_\beta) + (r I_\beta - \tau^\omega I_\beta) \right\| \right\| = \\
& = r(I_{\beta-1} - I_\beta) + (r - \tau^\omega) I_\beta \\
& = \frac{1}{4a^4} \cdot \frac{r^\beta \cdot \tau^{\omega(1-\beta)}}{(t-\tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \tau^{2\omega}}{4a^2(t-\tau)}\right] \times \\
& \times \left\{ r \left[I_{\beta-1} \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right) - I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right) \right] + (r - \tau^\omega) I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right) \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta(1-2\beta)}{(t-\tau)\tau^{\omega\beta}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2 + \tau^{2\omega}}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right) = \\
= & \frac{r^\beta\tau^{\omega(1-\beta)}(r-\tau^\omega)}{4a^4(t-\tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot \exp\left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] I_\beta\left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right) + \\
& + \frac{r^{\beta+1}\tau^{\omega(1-\beta)}}{4a^4(t-\tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta-1,\beta}\left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right) + \\
& + \frac{r^\beta(1-2\beta)}{2a^2(t-\tau)\tau^{\omega\beta}} \cdot \exp\left[-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot \exp\left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right),
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

мұнда

$$I_{\beta-1,\beta}(z) = I_{\beta-1}(z) - I_\beta(z)$$

белгілеуі енгізілген. Алынған (2.2.3)-(2.2.4) қатынастарды (2.2.2) теңдеуіне қойып, теңдеу шешімінің (2.2.5) интегралдық түрін аламыз:

$$\begin{aligned}
u(r, t) = & \\
= & \int_0^t \left\{ \frac{r^\beta\tau^{\omega(1-\beta)}(r-\tau^\omega)}{4a^4(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] I_\beta\left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right) + \right. \\
& + \frac{r^{\beta+1}\tau^{\omega(1-\beta)}}{4a^4(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta-1,\beta}\left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right) + \\
& \left. + \frac{r^\beta(1-2\beta)}{2a^2(t-\tau)\tau^{\omega\beta}} \exp\left[-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right) \right\} \mu(\tau) d\tau \\
& + \int_0^t \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{r^{2\beta}}{2^\beta(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot \nu(\tau) d\tau, \tag{2.2.5}
\end{aligned}$$

2.3 (2.1.3)-(2.1.5) шеттік есепті Вольтерр типті сингулярлық интегралдық теңдеуге түрлендіру

(2.2.5)-ші теңдікпен анықталатын $u(r, t)$ функциясы үшін (2.1.4)-(2.1.5) шеттік шарттарының қанағаттануын талап етейік, ол бізге $\mu(t)$ және $\nu(t)$ функцияларын анықтауға мүмкіндік береді.

$$\begin{aligned}
& \lim_{r \rightarrow 0} u(r, t) = \\
= & \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_0^t \left\{ \frac{r^\beta\tau^{\omega(1-\beta)}(r-\tau^\omega)}{4a^4(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] I_\beta\left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{r^{\beta+1}\tau^{\omega(1-\beta)}}{4a^4(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta-1,\beta}\left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right) + \\
& + \frac{r^\beta(1-2\beta)}{2a^2(t-\tau)\tau^{\omega\beta}} \exp\left[-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right) \Big\} \mu(\tau) d\tau \\
& + \int_0^t \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{r^{2\beta}}{2^\beta(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot v(\tau) d\tau \Big] = \\
& = \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t \frac{r^{2\beta}}{(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot v(\tau) d\tau = \\
& = \left\| \begin{array}{l} \frac{r^2}{4a^2(t-\tau)} = z; \quad t-\tau = \frac{r^2}{4a^2z}; \\ \tau = t - \frac{r^2}{4a^2z}; \quad d\tau = \frac{r^2 dz}{4a^2z^2} \end{array} \right\| = \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \times \\
& \times \lim_{\frac{r^2}{4a^2t}} \int_{\frac{r^2}{4a^2t}}^\infty \frac{r^{2\beta} \cdot (4a^2)^{\beta+1} \cdot z^{\beta+1}}{r^{2\beta+2}} \cdot \frac{r^2}{4a^2z^2} \cdot e^{-z} \cdot v\left(t - \frac{r^2}{4a^2z}\right) dz = \\
& = \frac{1}{(2a^2)^{\beta+1}} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot \frac{(4a^2)^{\beta+1}}{4a^2} \cdot \lim_{\frac{r^2}{4a^2t}} \int_{\frac{r^2}{4a^2t}}^\infty z^{\beta-1} \cdot e^{-z} \cdot v\left(t - \frac{r^2}{4a^2z}\right) dz = \\
& = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot v(t) \cdot \int_0^\infty z^{\beta-1} \cdot e^{-z} dz = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \cdot \Gamma(\beta) \cdot \psi(t) = \\
& = \frac{1}{2a^2\beta} \cdot v(t) = g_1(t).
\end{aligned}$$

Осы жерден қажетті тығыздықтардың бірі – $v(t)$ тікелей анықталады:

$$v(t) = 2a^2\beta g_1(t).$$

Осылайша,

$$\begin{aligned}
& u(r, t) = \\
& = \int_0^t \left\{ \frac{r^\beta \tau^{\omega(1-\beta)}(r-\tau^\omega)}{4a^4(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] I_\beta\left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right) + \right. \\
& + \frac{r^{\beta+1}\tau^{\omega(1-\beta)}}{4a^4(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta-1,\beta}\left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right) + \\
& \left. + \frac{r^\beta(1-2\beta)}{2a^2(t-\tau)\tau^{\omega\beta}} \exp\left[-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right) \right\} \mu(\tau) d\tau \\
& + \widetilde{g}_1(r, t), \quad (2.3.1)
\end{aligned}$$

мұнда

$$\widetilde{g}_1(r, t) = \frac{1}{(2a^2)^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{r^{2\beta}}{(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot g_1(t) d\tau.$$

Ескерту 2.3.1. Егер $g_1(t)$ шектелген болса, онда $\widetilde{g}_1(r, t)$ функциясы да шектелген болады.

Шынында да:

$$\begin{aligned} \widetilde{g}_1(r, t) &\leq \frac{1}{(2a^2)^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot |g_1(t)| \int_0^t \frac{r^{2\beta}}{(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\tau = \\ &= \left\| \frac{r^2}{4a^2(t-\tau)} = z; \quad t-\tau = \frac{r^2}{4a^2z}; \quad d\tau = \frac{r^2}{4a^2z^2} dz \right\| = \\ &= \frac{1}{(2a^2)^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot |g_1(t)| \int_{\frac{r^2}{4a^2t}}^{\infty} \frac{r^{2\beta} \cdot 4^{\beta+1} \cdot a^{2\beta+2} \cdot z^{\beta+1}}{r^{2\beta+2}} \cdot \frac{r^2}{4a^2z^2} \cdot e^{-z} dz = \\ &= \frac{1}{(2a^2)^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot 4^\beta \cdot a^{2\beta} \cdot |g_1(t)| \int_{\frac{r^2}{4a^2t}}^{\infty} z^{\beta-1} \cdot e^{-z} dz = \\ &= |g_1(t)| \cdot \frac{\Gamma\left(\beta, \frac{r^2}{4a^2t}\right)}{\Gamma(\beta)} < |g_1(t)|, \quad \forall (r, t) \in G. \end{aligned}$$

Енді (2.1.5) шеттік шартты қанағаттандырайық, яғни $u(r, t)|_{r=t^\omega} = \lim_{r \rightarrow t^\omega} u(r, t)$ табамыз.

$$\begin{aligned} u(r, t)|_{r=t^\omega} &= \lim_{r \rightarrow t^\omega} u(r, t) = g_2(t) = \widetilde{g}_1(t^\omega, t) + \\ &+ \int_0^t \left\{ \frac{t^{\omega(\beta+1)} \tau^{\omega(1-\beta)}}{4a^4(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{t^{\omega\beta} (1-2\beta)}{2a^2(t-\tau) \tau^{\omega\beta}} \exp\left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right) \right\} \mu(\tau) d\tau \\ &+ \lim_{r \rightarrow t^\omega} \int_0^t \frac{r^\beta \tau^{\omega(1-\beta)} (r - \tau^\omega)}{4a^4(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(r - \tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \times \\ &\times \exp\left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right) \mu(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Соңғы шекті анықтайық:

$$\begin{aligned}
& \lim_{r \rightarrow t^\omega - 0} \int_0^t \frac{r^\beta \tau^{\omega(1-\beta)} (r - \tau^\omega)}{4a^4 (t - \tau)^2} \exp \left[-\frac{(r - \tau^\omega)^2}{4a^2 (t - \tau)} \right] \times \\
& \quad \times \exp \left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2 (t - \tau)} \right] I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2 (t - \tau)} \right) \mu(\tau) d\tau = \\
& \quad = \|r - \tau^\omega = (r - t^\omega) + (t^\omega - \tau^\omega)\| = \\
& = \lim_{r \rightarrow t^\omega - 0} \int_0^t \frac{r^\beta \tau^{\omega(1-\beta)}}{4a^4 (t - \tau)^2} \exp \left[-\frac{(r - t^\omega)^2 + 2(r - t^\omega)(t^\omega - \tau^\omega) + (t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2 (t - \tau)} \right] \times \\
& \quad \times \{(r - t^\omega) + (t^\omega - \tau^\omega)\} \exp \left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2 (t - \tau)} \right] I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2 (t - \tau)} \right) \mu(\tau) d\tau = \\
& = \lim_{r \rightarrow t^\omega - 0} \int_0^t \frac{r^\beta \tau^{\omega(1-\beta)} (t^\omega - \tau^\omega)}{4a^4 (t - \tau)^2} \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2 (t - \tau)} \right] \times \\
& \quad \times \exp \left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2 (t - \tau)} \right] I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2 (t - \tau)} \right) \mu(\tau) d\tau + \\
& + \lim_{r \rightarrow t^\omega - 0} \int_0^t \frac{r^\beta \tau^{\omega(1-\beta)}}{4a^4 (t - \tau)^2} \exp \left[-\frac{(r - t^\omega)^2}{4a^2 (t - \tau)} \right] \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2 (t - \tau)} \right] \times \\
& \quad \times (r - t^\omega) \exp \left[-\frac{r\tau^\omega}{2a^2 (t - \tau)} \right] I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2 (t - \tau)} \right) \mu(\tau) d\tau = \\
& = \int_0^t \frac{t^{\omega\beta} \tau^{\omega(1-\beta)} (t^\omega - \tau^\omega)}{4a^4 (t - \tau)^2} \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2 (t - \tau)} \right] \times \\
& \quad \times \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2 (t - \tau)} \right] I_\beta \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2 (t - \tau)} \right) \mu(\tau) d\tau + \\
& + \lim_{r \rightarrow t^\omega - 0} \int_0^t \frac{r^\beta \tau^{\omega(1-\beta)}}{4a^4 (t - \tau)^2} \exp \left[-\frac{(r - t^\omega)^2}{4a^2 (t - \tau)} \right] \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2 (t - \tau)} \right] \times \\
& \quad \times (r - t^\omega) \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2 (t - \tau)} \right] I_\beta \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2 (t - \tau)} \right) \mu(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Әрі қарай:

$$\begin{aligned}
& \lim_{r \rightarrow t^\omega - 0} \int_0^t \frac{r^\beta \tau^{\omega(1-\beta)}}{a^2 (r - t^\omega)} \cdot \frac{(r - t^\omega)^2}{4a^2 (t - \tau)^2} \exp \left[-\frac{(r - t^\omega)^2}{4a^2 (t - \tau)} \right] \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2 (t - \tau)} \right] \times \\
& \quad \times \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2 (t - \tau)} \right] I_\beta \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2 (t - \tau)} \right) \mu(\tau) d\tau =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \left\| \begin{aligned} z &= \frac{(r-t^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}; & dz &= \frac{(r-t^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)^2} d\tau; \\ \frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} &= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{4a^2 z}{(r-t^\omega)^2} \cdot \left(\frac{4a^2 t^2 z - (r-t^\omega)^2 t}{4a^2 z} \right)^\omega &= & \\ &= \frac{2z}{(r-t^\omega)^2} \cdot \left(\frac{4a^2 t^2 z - (r-t^\omega)^2 t}{4a^2 z} \right)^\omega; & & \\ t-\tau &= \frac{(r-t^\omega)^2}{4a^2 z}; & \tau &= t - \frac{(r-t^\omega)^2}{4a^2 z} \end{aligned} \right\| = \\
&= \lim_{r \rightarrow t^\omega - 0} \int_{\frac{(r-t^\omega)^2}{4a^2 t}}^{\infty} \frac{r^\beta \left(t - \frac{(r-t^\omega)^2}{4a^2 z} \right)^{\omega(1-\beta)} e^{-z}}{a^2 (r-t^\omega)} \exp \left[-\frac{\left(t^\omega - \left(t - \frac{(r-t^\omega)^2}{4a^2 z} \right)^\omega \right)^2}{4a^2 (t-\tau)} \right] \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{2z}{(r-t^\omega)^2} \cdot \left(\frac{4a^2 t^2 z - (r-t^\omega)^2 t}{4a^2 z} \right)^\omega \right] \times \\
&\quad \times I_\beta \left(\frac{2z}{(r-t^\omega)^2} \cdot \left(\frac{4a^2 t^2 z - (r-t^\omega)^2 t}{4a^2 z} \right)^\omega \right) \mu \left(t - \frac{(r-t^\omega)^2}{4a^2 z} \right) dz = \\
&= \frac{t^\omega \mu(t)}{a^2} \lim_{r \rightarrow t^\omega - 0} \int_{\frac{(r-t^\omega)^2}{4a^2 t}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{r-t^\omega} \exp \left[-\frac{2z}{(r-t^\omega)^2} \cdot \left(\frac{4a^2 t^2 z - (r-t^\omega)^2 t}{4a^2 z} \right)^\omega \right] \times \\
&\quad \times I_\beta \left(\frac{2z}{(r-t^\omega)^2} \cdot \left(\frac{4a^2 t^2 z - (r-t^\omega)^2 t}{4a^2 z} \right)^\omega \right) dz = \\
&= \left\| e^{-z} I_\nu(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} \quad \text{при } z \gg 1 \right\| = \\
&= \frac{t^\omega \mu(t)}{a^2} \lim_{r \rightarrow t^\omega - 0} \int_{\frac{(r-t^\omega)^2}{4a^2 t}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{r-t^\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2z}{(r-t^\omega)^2} \cdot \left(\frac{4a^2 t^2 z - (r-t^\omega)^2 t}{4a^2 z} \right)^\omega}} dz = \\
&= \left\| \sqrt{(r-t^\omega)^2} = t^\omega - r \right\| = \\
&= -\frac{t^\omega \mu(t)}{a^2} \lim_{r \rightarrow t^\omega - 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{t^\omega - r} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{t^\omega - r}{\sqrt{2zt^{2\omega}}} dz = -\frac{\mu(t)}{2a^2 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz = \\
&= \left\| \begin{aligned} z &= \eta^2 \\ dz &= 2\eta d\eta \end{aligned} \right\| = -\frac{\mu(t)}{2a^2 \sqrt{\pi}} \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = -\frac{\mu(t)}{2a^2}.
\end{aligned}$$

Осылайша,

$$\begin{aligned}
& \mu(t) - \\
& - \int_0^t \left\{ \frac{t^{\omega\beta} \tau^{\omega(1-\beta)} (t^\omega - \tau^\omega)}{2a^2(t-\tau)^2} \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)} \right] \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right] I_\beta \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right) \right. \\
& + \frac{t^{\omega(\beta+1)} \tau^{\omega(1-\beta)}}{2a^2(t-\tau)^2} \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)} \right] \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right] I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right) + \\
& \left. + \frac{t^{\omega\beta} (1-2\beta)}{(t-\tau) \tau^{\omega\beta}} \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)} \right] \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right] \cdot I_\beta \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right) \right\} \mu(\tau) d\tau \\
& = f(t). \quad (2.3.2)
\end{aligned}$$

мұнда

$$f(t) = -2a^2 g_2(t) + 2a^2 \widetilde{g}_1(t^\omega, t).$$

2.4 (2.3.2) сингулярлық интегралдық теңдеудің ерекшеліктері туралы

Біздің шеттік есеп түрлендірілген (2.3.2)-ші бастапқы интегралдық теңдеуді зерттеу үшін, жаңа $\mu_1(t)$ функциясын енгіземіз:

$$\mu_1(t) = t^{\omega(1-\beta)} \cdot \mu(t),$$

онда келесі теңдеуді аламыз:

$$\mu_1(t) - \int_0^t \sum_{i=1}^3 N_{i\omega}(t, \tau) \cdot \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)} \right] \mu_1(\tau) d\tau = t^{\omega(1-\beta)} \cdot f(t), \quad (2.4.1)$$

мұнда

$$\begin{aligned}
N_{1\omega}(t, \tau) &= \frac{(1-2\beta)t^\omega}{(t-\tau)\tau^\omega} \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right] \cdot I_\beta \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right), \\
N_{2\omega}(t, \tau) &= \frac{t^{2\omega}}{2a^2(t-\tau)^2} \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right] I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right), \\
N_{3\omega}(t, \tau) &= \frac{t^\omega (t^\omega - \tau^\omega)}{2a^2(t-\tau)^2} \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right] I_\beta \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right).
\end{aligned}$$

Ескерту 2.4.1. Кез келген $\omega > \frac{1}{2}$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ мәндері үшін келесі теңдіктер ақиқат:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \{N_{1\omega}(t, \tau) + N_{2\omega}(t, \tau)\} d\tau = \frac{1-\beta}{\beta}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t N_{3\omega}(t, \tau) d\tau = 0.$$

Теңдіктерді дәлелдеу үшін келесі интегралдарға екі жақты бағалау жасаймыз.

Айталық $\omega > 1$. Онда:

$$\begin{aligned}
 I_{N_{1\omega}}(t) &= \int_0^t \frac{(1-2\beta)t^\omega}{(t-\tau)\tau^\omega} \exp\left[-\frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right) d\tau = \\
 &= \left\| \frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} = z, \quad dz = \frac{t^\omega[\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega]}{2a^2(t-\tau)^2} d\tau \right\| = \\
 &= \int_0^\infty \frac{(1-2\beta)t^\omega}{(t-\tau)\tau^\omega} \cdot \frac{2a^2(t-\tau)^2}{t^\omega[\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega]} \cdot \frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz = \\
 &= \int_0^\infty \frac{(1-2\beta)t^\omega}{\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz.
 \end{aligned}$$

$\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) < t^\omega - \tau^\omega < \omega t^{\omega-1}(t-\tau)$ теңсіздігін ескере отырып:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty \frac{(1-2\beta)t^\omega}{t^\omega - \tau^\omega + \tau^\omega} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz < I_{N_{1\omega}}(t) < \\
 &< \int_0^\infty \frac{(1-2\beta)(\omega t^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega)}{\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz, \\
 &\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{1-2\beta}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz < \lim_{t \rightarrow 0} I_{N_{1\omega}}(t) < \\
 &< \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{(1-2\beta)(\omega t^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega)}{\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz, \\
 &\quad \left\| t - \tau = \frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2z} \right\| \\
 &\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{1-2\beta}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz < \lim_{t \rightarrow 0} I_{N_{1\omega}}(t) < \\
 &< \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{(1-2\beta)\left(\omega t^{\omega-1} \cdot \frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2z} + \tau^\omega\right)}{\omega\tau^{\omega-1} \cdot \frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2z} + \tau^\omega} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz, \\
 &\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{1-2\beta}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz < \lim_{t \rightarrow 0} I_{N_{1\omega}}(t) < \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{1-2\beta}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz.
 \end{aligned}$$

Ендеше:

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_{N_{1\omega}}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{1 - 2\beta}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_{\beta}(z) dz = \frac{1 - 2\beta}{\beta}.$$

Осыған ұқсас:

$$\begin{aligned} I_{N_{2\omega}}(t) &= \int_0^t \frac{t^{2\omega}}{2a^2(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{t^{\omega}\tau^{\omega}}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta-1,\beta}\left(\frac{t^{\omega}\tau^{\omega}}{2a^2(t-\tau)}\right) d\tau = \\ &= \left\| \frac{t^{\omega}\tau^{\omega}}{2a^2(t-\tau)} = z, \quad dz = \frac{t^{\omega}[\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^{\omega}]}{2a^2(t-\tau)^2} d\tau \right\| = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t^{2\omega}}{2a^2(t-\tau)^2} \cdot \frac{2a^2(t-\tau)^2}{t^{\omega}[\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^{\omega}]} \cdot e^{-z} I_{\beta-1,\beta}(z) dz = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t^{\omega}}{\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^{\omega}} \cdot e^{-z} I_{\beta-1,\beta}(z) dz. \end{aligned}$$

Онда, $\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^{\omega} < t^{\omega} < \omega t^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^{\omega}$ теңсіздігін ескеріп, алатынымыз:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \frac{t^{\omega}}{t^{\omega} - \tau^{\omega} + \tau^{\omega}} e^{-z} I_{\beta-1,\beta}(z) dz < I_{N_{2\omega}}(t) < \\ &< \int_0^{\infty} \frac{\omega t^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^{\omega}}{\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^{\omega}} e^{-z} I_{\beta-1,\beta}(z) dz, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-z} I_{\beta-1,\beta}(z) dz &< \lim_{t \rightarrow 0} I_{N_{2\omega}}(t) < \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\omega t^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^{\omega}}{\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^{\omega}} e^{-z} I_{\beta-1,\beta}(z) dz, \\ &\left\| t - \tau = \frac{t^{\omega}\tau^{\omega}}{2a^2 z} \right\| \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-z} I_{\beta-1,\beta}(z) dz &< \lim_{t \rightarrow 0} I_{N_{2\omega}}(t) < \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\omega t^{\omega-1} \cdot \frac{t^{\omega}\tau^{\omega}}{2a^2 z} + \tau^{\omega}}{\omega\tau^{\omega-1} \cdot \frac{t^{\omega}\tau^{\omega}}{2a^2 z} + \tau^{\omega}} e^{-z} I_{\beta-1,\beta}(z) dz, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-z} I_{\beta-1,\beta}(z) dz &< \lim_{t \rightarrow 0} I_{N_{2\omega}}(t) < \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-z} I_{\beta-1,\beta}(z) dz. \end{aligned}$$

Ендеше:

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_{N_{2\omega}}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-z} I_{\beta-1, \beta}(z) dz = 1.$$

Онда:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \{N_{1\omega}(t, \tau) + N_{2\omega}(t, \tau)\} d\tau = \frac{1-2\beta}{\beta} + 1 = \frac{1-\beta}{\beta}.$$

$\omega > 1$ үшін $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t N_{3\omega}(t, \tau) d\tau = 0$ екендігін дәлелдейік.

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \frac{t^\omega(t^\omega - \tau^\omega)}{2a^2(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] I_\beta\left(\frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right) d\tau = \\ & = \left\| \frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} = z, \quad dz = \frac{t^\omega[\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega]}{2a^2(t-\tau)^2} d\tau \right\| = \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{t^\omega(t^\omega - \tau^\omega)}{2a^2(t-\tau)^2} \cdot \frac{2a^2(t-\tau)^2}{t^\omega[\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega]} \cdot \frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz = \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{(t^\omega - \tau^\omega)}{\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega} \cdot \frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz = \\ & = \left\| t - \tau = \frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2z} \right\| = \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{(t^\omega - \tau^\omega)}{\omega\tau^{\omega-1} \cdot \frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2z} + \tau^\omega} \cdot \frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz = \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{t^\omega}{2a^2} \cdot \frac{t^\omega - \tau^\omega}{t-\tau} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz = \\ & = \left\| \omega\tau^{\omega-1} < \frac{t^\omega - \tau^\omega}{t-\tau} < \omega t^{\omega-1}, \quad \omega > 1 \right\| < \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{t^\omega}{2a^2} \cdot \omega t^{\omega-1} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz = \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} t^{2\omega-1} \cdot \frac{\omega}{2a^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz = \lim_{t \rightarrow 0} t^{2\omega-1} \cdot \frac{\omega}{2a^2\beta} = 0. \end{aligned}$$

Осылайша:

$$\int_0^t N_{3\omega}(t, \tau) d\tau \leq \frac{\omega}{2a^2\beta} \cdot t^{2\omega-1}.$$

$\frac{1}{2} < \omega < 1$ жағдайы үшін осыған ұқсас болады:

$$\begin{aligned} I_{N_{1\omega}}(t) &= \int_0^t \frac{(1-2\beta)t^\omega}{(t-\tau)\tau^\omega} \exp\left[-\frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right) d\tau = \\ &= \left\| \frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} = z \right\| = \int_0^\infty \frac{(1-2\beta)t^\omega}{\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz. \end{aligned}$$

$\omega t^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega < t^\omega < \omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega$ теңсіздігін ескере отырып:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{(1-2\beta)(\omega t^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega)}{\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz &< I_{N_{1\omega}}(t) < \\ &< \int_0^\infty \frac{(1-2\beta)t^\omega}{t^\omega - \tau^\omega + \tau^\omega} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz, \\ &\left\| t - \tau = \frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2z} \right\| \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{1-2\beta}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz &< \lim_{t \rightarrow 0} I_{N_{1\omega}}(t) < \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{1-2\beta}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz. \end{aligned}$$

Ендеше:

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_{N_{1\omega}}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{1-2\beta}{z} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) dz = \frac{1-2\beta}{\beta}.$$

Әрі қарай:

$$\begin{aligned} I_{N_{2\omega}}(t) &= \int_0^t \frac{t^{2\omega}}{2a^2(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta-1,\beta}\left(\frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}\right) d\tau = \\ &= \left\| \frac{t^\omega\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} = z \right\| = \int_0^\infty \frac{t^\omega}{\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega} \cdot e^{-z} I_{\beta-1,\beta}(z) dz. \end{aligned}$$

Онда $\omega t^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega < t^\omega < \omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega$ теңсіздігін ескере отырып, алатынымыз:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \frac{\omega t^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^{\omega}}{\omega \tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^{\omega}} e^{-z} I_{\beta-1, \beta}(z) dz < I_{N_{2\omega}}(t) < \\
& < \int_0^{\infty} \frac{t^{\omega}}{t^{\omega} - \tau^{\omega} + \tau^{\omega}} e^{-z} I_{\beta-1, \beta}(z) dz \\
& \quad \left\| t - \tau = \frac{t^{\omega} \tau^{\omega}}{2a^2 z} \right\| \\
& \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-z} I_{\beta-1, \beta}(z) dz < \lim_{t \rightarrow 0} I_{N_{2\omega}}(t) < \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-z} I_{\beta-1, \beta}(z) dz
\end{aligned}$$

Ендеше:

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_{N_{2\omega}}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-z} I_{\beta-1, \beta}(z) dz = 1.$$

Онда:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \{N_{1\omega}(t, \tau) + N_{2\omega}(t, \tau)\} d\tau = \frac{1-2\beta}{\beta} + 1 = \frac{1-\beta}{\beta}.$$

$\frac{1}{2} < \omega < 1$ үшін $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t N_{3\omega}(t, \tau) d\tau = 0$ екендігін дәлелдейік.

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \frac{t^{\omega}(t^{\omega} - \tau^{\omega})}{2a^2(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{t^{\omega}\tau^{\omega}}{2a^2(t-\tau)}\right] I_{\beta}\left(\frac{t^{\omega}\tau^{\omega}}{2a^2(t-\tau)}\right) d\tau = \\
& = \left\| \left\| \omega t^{\omega-1} < \frac{t^{\omega} - \tau^{\omega}}{t-\tau} < \omega \tau^{\omega-1}, \quad 0 < \omega < 1 \right\| \right\| < \\
& \quad \left\| e^{-z} I_{\beta}(z) < \frac{D}{\sqrt{z}} \right\| < \\
& < \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \frac{\omega t^{\omega} \tau^{\omega-1}}{2a^2(t-\tau)} \cdot \frac{D\sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{t-\tau}}{\sqrt{t^{\omega}\tau^{\omega}}} d\tau = \frac{D\omega}{\sqrt{2a^2}} \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{\omega}{2}} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \cdot \tau^{\frac{\omega}{2}-1} d\tau = \\
& = \|\tau = tx, \quad d\tau = tdx\| = \frac{D\omega}{\sqrt{2a^2}} \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{\omega}{2}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{\omega}{2}-1} x^{\frac{\omega}{2}-1} tdx = \\
& = \frac{D\omega}{\sqrt{2a^2}} \lim_{t \rightarrow 0} t^{\omega-\frac{1}{2}} \int_0^1 x^{\frac{\omega}{2}-1} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}-1} dx = \frac{D\omega}{\sqrt{2a^2}} \lim_{t \rightarrow 0} t^{\omega-\frac{1}{2}} B\left(\frac{\omega}{2}; \frac{1}{2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Осылайша, $\frac{1}{2} < \omega < 1$ болғанда

$$\int_0^t N_{3\omega}(t, \tau) d\tau \leq C(a, \omega) \cdot t^{\frac{2\omega-1}{2}}.$$

Ескерту 2.4.2. 2.4.1-ші ескертуден келесі тұжырым шығады: $\frac{1}{2} < \beta < 1$ болғанда (2.3.2) интегральдық теңдеуінің елеулі шектелген функциялар класында тізбектеп жуықтау әдісімен табуға болатын жалғыз шешімі бар. $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғанда берілген теңдеу сингулярлы болады және оған тізбектеп жуықтау әдісі қолданылмайды.

Сондықтан біз $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғандағы жағдайды қарастырамыз және (2.3.2) сингулярлық интегралдық теңдеудің шешімін табу үшін сәйкес сипаттамалық теңдеуді құрамыз.

2.5 Сипаттамалық сингулярлық интегралдық теңдеу

(2.4.1) сингулярлық интегралдық теңдеуіне сәйкес сипаттамалық теңдеу келесідей болады:

$$\mu_1(t) - \int_0^t \sum_{i=1}^2 N_{ih}(t, \tau) \cdot e^{-\frac{(2\omega-1) \cdot (t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})}{4a^2}} \mu_1(\tau) d\tau = q(t), \quad (2.5.1)$$

мұнда

$$\begin{aligned} N_{1h}(t, \tau) &= \\ &= \frac{(1-2\beta)(2\omega-1)t^{2\omega-1}}{(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})\tau} e^{-\frac{(2\omega-1) \cdot (t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})}{2a^2(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})}} I_{\beta} \left(\frac{(2\omega-1) \cdot t^{2\omega-1} \tau^{2\omega-1}}{2a^2(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})} \right), \\ N_{2h}(t, \tau) &= \\ &= \frac{(2\omega-1)^2 t^{4\omega-2} \tau^{2\omega-2}}{2a^2(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})^2} e^{-\frac{(2\omega-1) \cdot (t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})}{2a^2(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})}} I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{(2\omega-1) \cdot t^{2\omega-1} \tau^{2\omega-1}}{2a^2(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})} \right). \end{aligned}$$

(2.5.1)-ші теңдеу (2.4.1)-ші теңдеу үшін шынымен де сипаттамалық теңдеу болатынын көрсетейік. Біріншіден, келесі ескерту әділ екендігін көрсету керек.

Ескерту 2.5.1. $\omega > \frac{1}{2}, 0 < \beta < \frac{1}{2}$ кез келген мәні үшін келесі теңдіктер ақиқат болады:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \{N_{1h}(t, \tau) + N_{2h}(t, \tau)\} d\tau = \frac{1-\beta}{\beta}.$$

Дәлелдеуі. Шынымен де,

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \{N_{1h}(t, \tau) + N_{2h}(t, \tau)\} d\tau = \\
& = \int_0^t \left\{ \frac{(1-2\beta)(2\omega-1)t^{2\omega-1}}{(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})\tau} e^{-\frac{(2\omega-1)t^{2\omega-1}\tau^{2\omega-1}}{2a^2(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})}} I_\beta \left(\frac{(2\omega-1)t^{2\omega-1}\tau^{2\omega-1}}{2a^2(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{(2\omega-1)^2 t^{4\omega-2} \tau^{2\omega-2}}{2a^2(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})^2} e^{-\frac{(2\omega-1)t^{2\omega-1}\tau^{2\omega-1}}{2a^2(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})}} I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{(2\omega-1)t^{2\omega-1}\tau^{2\omega-1}}{2a^2(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})} \right) \right\} d\tau = \\
& = \left\| z = \frac{(2\omega-1)t^{2\omega-1}\tau^{2\omega-1}}{2a^2(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})}, \quad dz = \frac{(2\omega-1)^2 t^{4\omega-2} \tau^{2\omega-2}}{2a^2(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})^2} d\tau \right\| = \\
& = \int_0^\infty \left\{ \frac{(1-2\beta)(2\omega-1)t^{2\omega-1}}{(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})\tau} \cdot \frac{2a^2(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})^2}{(2\omega-1)^2 t^{4\omega-2} \tau^{2\omega-2}} \cdot \frac{(2\omega-1)t^{2\omega-1}\tau^{2\omega-1}}{2a^2(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})} \right. \\
& \quad \cdot \frac{1}{z} e^{-z} I_\beta(z) \\
& \quad \left. + \frac{(2\omega-1)^2 t^{4\omega-2} \tau^{2\omega-2}}{2a^2(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})^2} \cdot \frac{2a^2(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})^2}{(2\omega-1)^2 t^{4\omega-2} \tau^{2\omega-2}} \cdot e^{-z} I_{\beta-1, \beta}(z) \right\} dz = \\
& = \int_0^\infty \left\{ (1-2\beta) \cdot \frac{1}{z} e^{-z} I_\beta(z) + e^{-z} \{I_{\beta-1}(z) - I_\beta(z)\} \right\} dz = \frac{1-2\beta}{\beta} + 1 = \frac{1-\beta}{\beta}.
\end{aligned}$$

Екіншіден, келесі теорема орындалатындығын көрсету керек.

Теорема 2.5.1. Егер $\omega > \frac{1}{2}$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болса, онда келесі теңсіздік әділ болады:

$$|(P_{1\omega} + P_{2\omega}) - (P_{1h} + P_{2h})| \leq C_1(\omega, \beta) |\omega - 1| \cdot \frac{t^{(\beta+1)\omega-1} \cdot \tau^{(\beta-1)\omega}}{(t-\tau)^\beta} \cdot e^{-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}}.$$

Дәлелдеуі. Келесі белгілеулерді енгіземіз:

$$P_{i\omega}(t, \tau) = N_{i\omega}(t, \tau) \cdot e^{-Q_\omega(t, \tau)}, \quad P_{ih}(t, \tau) = N_{ih}(t, \tau) \cdot e^{-Q_h(t, \tau)}, \quad i = 1, 2.$$

мұнда

$$Q_\omega(t, \tau) = \frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}, \quad Q_h(t, \tau) = \frac{(2\omega-1) \cdot (t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})}{4a^2}.$$

Алдымен келесі леммалар дұрыс екендігін көрсетеміз.

Лемма 2.5.1. Егер $\omega > 1$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болса, онда

$$Q_h(t, \tau) \geq Q_\omega(t, \tau), \quad \text{яғни} \quad e^{-Q_h(t, \tau)} \leq e^{-Q_\omega(t, \tau)},$$

теңсіздігі әділ болады. Егер $\frac{1}{2} < \omega < 1$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болса, онда

$$Q_h(t, \tau) \leq Q_\omega(t, \tau), \quad \text{яғни} \quad e^{-Q_h(t, \tau)} \geq e^{-Q_\omega(t, \tau)}$$

теңсіздігі әділ болады.

Дәлелдеуі. Айталық $\omega > 1$. Онда:

$$\begin{aligned} (2\omega - 1)(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})(t - \tau) &= \|\text{83, 55 б., (2.15.1)}\| = \\ &= [(2\omega - 1)t^{2\omega-2}(t - \tau)] \cdot \frac{t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1}}{t^{2\omega-2}} \geq \\ &\geq (t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1}) \cdot \frac{t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1}}{t^{2\omega-2}} = \left[\frac{t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1}}{t^{\omega-1}} \right]^2 = \left[\frac{t^{2\omega-1}}{t^{\omega-1}} - \frac{\tau^{2\omega-1}}{t^{\omega-1}} \right]^2 \geq \\ &\geq \left[\frac{t^{2\omega-1}}{t^{\omega-1}} - \frac{\tau^{2\omega-1}}{\tau^{\omega-1}} \right]^2 = (t^\omega - \tau^\omega)^2. \end{aligned}$$

Айталық $\frac{1}{2} < \omega < 1$.

$$\begin{aligned} (2\omega - 1)(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})(t - \tau) &= (2\omega - 1)(t^{2\omega-1} - \tau^{\omega-1} \cdot \tau^\omega)(t - \tau) = \\ &= \left\| \begin{array}{l} \tau < t \\ \tau^{1-\omega} < t^{1-\omega}, \quad \frac{1}{2} < \omega < 1 \\ \tau^{\omega-1} > t^{\omega-1}, \quad \frac{1}{2} < \omega < 1 \end{array} \right\| < (2\omega - 1)(t^{2\omega-1} - t^{\omega-1} \cdot \tau^\omega)(t - \tau) = \\ &= (2\omega - 1)t^{\omega-1} \cdot (t^\omega - \tau^\omega)(t - \tau) = \left\| \begin{array}{l} \omega < 1 \\ 2\omega - 1 < \omega \end{array} \right\| < \\ &< \omega t^{\omega-1}(t - \tau) \cdot (t^\omega - \tau^\omega) = \|\text{83, 55 б., (2.15.1)}\| < \\ &< (t^\omega - \tau^\omega) \cdot (t^\omega - \tau^\omega) = (t^\omega - \tau^\omega)^2. \end{aligned}$$

Лемма дәлелденді.

Лемма 2.5.2. Егер $\omega > \frac{1}{2}$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болса, онда

$$|N_{1\omega} - N_{1h}| \leq C_i(\omega, \beta) |\omega - 1| \cdot \frac{t^{(\beta+1)\omega-1} \cdot \tau^{(\beta-1)\omega}}{(t - \tau)^\beta} \cdot e^{-Q_\omega(t, \tau)}$$

теңсіздігі ақиқат болады.

Дәлелдеуі. Айталық $\omega > 1$. Онда:

$$|P_{1\omega} - P_{1h}| \leq |N_{1\omega} - N_{1h}| e^{-Q_\omega} + N_{1h} e^{-Q_\omega} |1 - e^{-(Q_h - Q_\omega)}|,$$

Алдымен $|N_{1\omega} - N_{1h}|$ өрнегін бағалаймыз:

$$\begin{aligned}
|N_{1\omega} - N_{1h}| &= N_{1\omega} \left| 1 - \frac{N_{1h}}{N_{1\omega}} \right| = \left\| e^{-z} \cdot I_{\beta}(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}; z \gg 1 \right\| \leq \\
&\leq N_{1\omega}(t, \tau) \cdot \left| 1 - \frac{(2\omega - 1)t^{2\omega-1}}{\tau} \cdot \frac{\tau^{\omega}}{t^{\omega}} \cdot \frac{t - \tau}{t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1}} \right. \\
&\quad \left. \cdot \left[\frac{t^{\omega}\tau^{\omega}}{t - \tau} \cdot \frac{(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})}{(2\omega - 1)t^{2\omega-1} \cdot \tau^{2\omega-1}} \right]^{\frac{1}{2}} \right| \\
&= N_{1\omega}(t, \tau) \cdot \left| 1 - \frac{(2\omega - 1)^{\frac{1}{2}} t^{2\omega-1-\omega+\frac{\omega}{2}-\omega+\frac{1}{2}}}{\tau^{1-\omega-\frac{\omega}{2}+\omega-\frac{1}{2}}} \cdot \lim_{\substack{\tau \rightarrow t \\ \tau = tx}} \left(\frac{t - \tau}{(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})} \right)^{\frac{1}{2}} \right| = \\
&= \left\| \lim_{\substack{\tau \rightarrow t \\ \tau = tx}} \left(\frac{t - \tau}{(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})} \right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{t^{\omega-1}} \left(\frac{1 - x}{1 - x^{2\omega-1}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(2\omega - 1)^{-\frac{1}{2}}}{t^{\omega-1}} \right\| = \\
hN_{1\omega}(t, \tau) \cdot \left| 1 - \frac{t^{\frac{\omega-1}{2}}}{\tau^{\frac{1-\omega}{2}}} \cdot \frac{1}{t^{\omega-1}} \right| &= N_{1\omega}(t, \tau) \cdot \left| 1 - \frac{\tau^{\frac{\omega-1}{2}}}{t^{\frac{\omega-1}{2}}} \right| = N_{1\omega}(t, \tau) \cdot \left| \frac{t^{\frac{\omega-1}{2}} - \tau^{\frac{\omega-1}{2}}}{t^{\frac{\omega-1}{2}}} \right| \leq \\
&\leq (1 - 2\beta) \cdot \frac{t^{\frac{\omega-1}{2}} - \tau^{\frac{\omega-1}{2}}}{t - \tau} \cdot \frac{1}{t^{\frac{\omega-1}{2}}} \cdot \frac{t^{\omega}}{\tau^{\omega}} \cdot D \left[\frac{t^{\omega}\tau^{\omega}}{2a^2(t - \tau)} \right]^{\beta} \leq \\
&\leq \left\| \frac{t^{\frac{\omega-1}{2}} - \tau^{\frac{\omega-1}{2}}}{t - \tau} < \frac{\omega - 1}{2} t^{\frac{\omega-1}{2}-1} \right\| \leq \\
\leq \frac{(1 - 2\beta)|\omega - 1| t^{\frac{\omega-1}{2}-1}}{(2a^2)^{\beta} \cdot t^{\frac{\omega-1}{2}}} \cdot \frac{t^{\omega}}{\tau^{\omega}} \cdot \frac{t^{\beta\omega} \cdot \tau^{\beta\omega}}{(t - \tau)^{\beta}} &= \frac{(1 - 2\beta)}{(2a^2)^{\beta}} \cdot |\omega - 1| \cdot \frac{t^{\omega-1+\beta\omega} \cdot \tau^{-\omega+\beta\omega}}{(t - \tau)^{\beta}} \\
&\leq \\
\leq C_1^{(1)}(\omega, \beta) \cdot (1 - 2\beta) \cdot |\omega - 1| \cdot \frac{t^{(\beta+1)\omega-1} \cdot \tau^{(\beta-1)\omega}}{(t - \tau)^{\beta}}.
\end{aligned}$$

Екінші қосылғышты бағалаймыз. Алдымен:

$$\begin{aligned}
|1 - e^{-(Q_h - Q_{\omega})}| &= \|Q_h \geq Q_{\omega}\| \leq Q_h(t, \tau) - Q_{\omega}(t, \tau) = \\
&= \frac{(2\omega - 1)}{4a^2} (t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1}) - \frac{(t^{\omega} - \tau^{\omega})^2}{4a^2(t - \tau)} \leq \frac{(2\omega - 1)}{4a^2} (t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1}).
\end{aligned}$$

Онда

$$\begin{aligned}
& N_{1h}(t, \tau) \cdot |1 - e^{-(Q_h - Q_\omega)}| \leq \\
& \leq \frac{(1 - 2\beta)(2\omega - 1)^2}{4a^2} \cdot \frac{t^{2\omega-1}(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})}{\tau \cdot (t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})} \cdot e^{-z} \cdot I_\beta(z) \leq \\
& \leq \|e^{-z} \cdot I_\beta(z) < D_0 z^\beta\| \leq \\
& \leq D_0 \frac{(1 - 2\beta)(2\omega - 1)^2}{4a^2} \cdot \frac{t^{2\omega-1}}{\tau} \cdot \frac{(2\omega - 1)^\beta}{(2a^2)^\beta} \left[\frac{t^{2\omega-1} \cdot \tau^{2\omega-1}}{(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})} \right]^\beta \leq \\
& \leq D_0 \frac{(1 - 2\beta)(2\omega - 1)^{2+\beta}}{4a^2 \cdot (2a^2)^\beta} \cdot \frac{t^{2\omega-1}}{\tau} \cdot \left[\frac{t^{2\omega-1} \cdot \tau^{2\omega-1}}{(2\omega - 1)\tau^{2\omega-2}(t - \tau)} \right]^\beta = \\
& = C_1^{(2)}(\beta, \omega) \cdot (1 - 2\beta) \cdot \frac{t^{(2\omega-1)t^{(2\omega-1)\beta} \cdot \tau^{\beta-1}}}{(t - \tau)^\beta} = \\
& = \left\| \frac{(2\omega - 1)\beta = (\beta\omega + \omega - 1) - (1 - \beta)(\omega - 1);}{t^{(2\omega-1)\beta} \cdot t^{-(1-\beta)(\omega-1)} \cdot \tau^{\beta-1} \leq t^{\omega-1+\beta\omega} \cdot \tau^{-\omega+\beta\omega}} \right\| \leq \\
& \leq C_1^{(2)}(\beta, \omega) \cdot t^{2\omega-1} \cdot \frac{t^{(\beta+1)\omega-1} \cdot \tau^{(\beta-1)\omega}}{(t - \tau)^\beta}.
\end{aligned}$$

Лемма дәлелденді.

Лемма 2.5.3. Егер $\omega > \frac{1}{2}$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болса, онда:

$$|P_{2\omega}(t, \tau) - P_{2h}(t, \tau)| \leq C_2(\omega, \beta) \cdot \frac{t^{(\beta+1)\omega} \cdot \tau^{(\beta-1)\omega}}{(t - \tau)^\beta} \cdot e^{-Q_\omega(t, \tau)}$$

теңсіздігі әділ болады.

Дәлелдеуі. Айталық $\omega > 1$. Онда:

$$|P_{2\omega}(t, \tau) - P_{2h}(t, \tau)| = |N_{2\omega} - N_{2h}| e^{-Q_\omega} + N_{2h} e^{-Q_\omega} |1 - e^{-(Q_h - Q_\omega)}|.$$

2.5.2 леммадағы сияқты келесі бағалауды жүзеге асырамыз:

$$\begin{aligned}
& |N_{2\omega}(t, \tau) - N_{2h}(t, \tau)| \leq \|e^{-z} \cdot I_{\beta-1, \beta}(z) < D_1 z^{\beta-1}\| \leq \\
& \leq D_1 \frac{(2\omega - 1)^2 t^{4\omega-2} \tau^{2\omega-2}}{2a^2 (t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})^2} \cdot \frac{\left| t^{\frac{1-\omega}{2}} - \tau^{\frac{1-\omega}{2}} \right|}{t^{\frac{1-\omega}{2}}} \cdot \left[\frac{(2\omega - 1) t^{2\omega-1} \cdot \tau^{2\omega-1}}{t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1}} \right]^{\beta-1} \leq \\
& \leq \left\| \lim_{\substack{\tau \rightarrow t \\ \tau = tx}} \frac{\left| t^{\frac{1-\omega}{2}} - \tau^{\frac{1-\omega}{2}} \right|}{(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})} = t^{\frac{1-\omega}{2} - (2\omega-1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1 - x^{\frac{1-\omega}{2}}|}{1 - x^{2\omega-1}} \right\| \\
& = \left\| \frac{|1 - \omega|}{2(2\omega - 1)} \cdot t^{\frac{1-\omega}{2} - (2\omega-1)} \right\| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq D_1 \frac{(2\omega - 1)^2 |\omega - 1|}{2a^2 \cdot 2(2\omega - 1)} \\
&\quad \cdot \frac{t^{(4\omega-2)-(2\omega-1)+\frac{1-\omega}{2}-\frac{1-\omega}{2}} \cdot \tau^{2\omega-2} \left[\frac{(2\omega - 1)t^{2\omega-1} \cdot \tau^{2\omega-1}}{t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1}} \right]^{\beta-1}}{(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})} \leq \\
&\leq D_1 \cdot \frac{(2\omega - 1)^\beta |\omega - 1|}{2a^2 \cdot 2} \left[\frac{(2\omega - 1)t^{2\omega-1} \cdot \tau^{2\omega-1}}{t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1}} \right]^\beta \cdot \frac{1}{\tau} \leq \\
&\leq \left\| \frac{1}{(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})} < \frac{1}{(2\omega - 1)\tau^{2\omega-2}(t - \tau)} \right\| \leq \\
&\leq D_1 \frac{(2\omega - 1)^\beta |\omega - 1|}{4a^2} \cdot \frac{t^{(2\omega-1)\beta} \cdot \tau^{\beta-1}}{(t - \tau)^\beta} \leq C_2^{(1)}(\beta, \omega) |\omega - 1| \cdot \frac{t^{(\beta+1)\omega-1} \cdot \tau^{(\beta-1)\omega}}{(t - \tau)^\beta}.
\end{aligned}$$

Енді бағалайтынымыз:

$$\begin{aligned}
&N_{2h} |1 - e^{-(Q_h - Q_\omega)}| \leq \\
&\leq D_1 \frac{(2\omega - 1)^2 t^{4\omega-2} \cdot \tau^{2\omega-2}}{2a^2 (t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})^2} \cdot \frac{(2\omega - 1)}{4a^2} \cdot (t^{2\omega-1} \\
&\quad - \tau^{2\omega-1}) \left[\frac{(2\omega - 1)t^{2\omega-1} \cdot \tau^{2\omega-1}}{2a^2 (t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})} \right]^{\beta-1} = \\
&= \frac{(2\omega - 1)^{2+\beta}}{(2a^2)^\beta \cdot 4a^2} \cdot \frac{t^{4\omega-2+(2\omega-1)(\beta-1)} \cdot \tau^{2\omega-2+(2\omega-1)(\beta-1)}}{(t^{2\omega-1} - \tau^{2\omega-1})^\beta} \leq \\
&\leq \frac{(2\omega - 1)^{2+\beta} \cdot t^{(2\omega-1)(\beta+1)} \cdot \tau^{-(1-\beta)}}{(2a^2)^\beta \cdot 4a^2 (2\omega - 1)^\beta} = C_2^{(2)}(\beta, \omega) \cdot t^{2\omega-1} \cdot \frac{t^{(\beta+1)\omega-1} \cdot \tau^{(\beta-1)\omega}}{(t - \tau)^\beta}.
\end{aligned}$$

Лемма дәлелденді.

Ескерту 2.5.2. $\frac{1}{2} < \omega < 1$ болғанда ω параметрінің мәні үшін осы теңсіздіктерде $N_{i\omega}$ және N_{ih} ($i = 1, 2$) функцияларының рөлдерін сәйкесінше ауыстыра салған жеткілікті.

2.5.1-ші теореманың әділдігі 2.5.1-2.5.3 леммалардан шығады.

2.6 Сипаттамалық теңдеуді шешу

Сипаттамалық теңдеудің шешімін табу үшін келесі ауыстыруларды орындаймыз:

$$t_1 = \left[\frac{1}{2\omega - 1} \cdot t \right]^{\frac{1}{2\omega-1}}, \quad \tau_1 = \left[\frac{1}{2\omega - 1} \cdot \tau \right]^{\frac{1}{2\omega-1}}.$$

Онда келесі теңдеуді аламыз:

$$\begin{aligned} \mu_1(t_1) - \int_0^t & \left\{ \frac{(1-2\beta) \cdot t_1}{(t_1 - \tau_1) \cdot \tau_1} \exp \left[-\frac{t_1 \tau_1}{2a^2(t_1 - \tau_1)} \right] \cdot I_\beta \left(\frac{t_1 \tau_1}{2a^2(t_1 - \tau_1)} \right) + \right. \\ & + \frac{t_1^2}{2a^2(t_1 - \tau_1)^2} \exp \left[-\frac{t_1 \tau_1}{2a^2(t_1 - \tau_1)} \right] I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{t_1 \tau_1}{2a^2(t_1 - \tau_1)} \right) + \\ & \left. + \frac{t_1}{2a^2(t_1 - \tau_1)} \exp \left[-\frac{t_1 \tau_1}{2a^2(t_1 - \tau_1)} \right] I_\beta \left(\frac{t_1 \tau_1}{2a^2(t_1 - \tau_1)} \right) \right\} \mu_2(\tau_1) d\tau_1 = F(t_1), \end{aligned}$$

мұның шешімі алдында алынған болатын [66, p. 96]:

$$\mu_1(t_1) = F(t_1) + \int_0^{t_1} R(t_1, \tau_1) F(\tau_1) d\tau_1 + C \mu_1^{(0)}(t_1),$$

мұнда

$$\mu_1^{(0)}(t_1) = C \cdot \exp \left(-\frac{p_0(\beta)}{t_1} \right), \quad p_0(\beta) > 0.$$

және $p_0(\beta)$ – келесі теңдеудің түбірі:

$$(1 - 2\beta) K_\beta \left(\frac{\sqrt{p}}{a} \right) - \frac{\sqrt{p}}{a} K_{\beta-1} \left(\frac{\sqrt{p}}{a} \right) = 0.$$

Бұл орайда $R(t_1, \tau_1)$ резольвента келесі бағалауға ие:

$$R(t_1, \tau_1) \leq C(\beta) \frac{t_1^{1-(\beta-\varepsilon)} \cdot \tau_1^{-1-(\beta-\varepsilon)}}{(t_1 - \tau_1)^{1-(\beta-\varepsilon)}}$$

Осылайша, (2.4.1) сипаттамалық теңдеудің шешімі келесі түрде болады:

$$\mu_{1h}(t) = F_h(t) + \int_0^t R_h(t, \tau) F_h(\tau) d\tau + C \mu_{1h}^{(0)}(t), \quad (2.6.1)$$

мұнда $R(t, \tau)$ резольвентаның келесі бағалауы бар:

$$R_h(t, \tau) \leq C_1(\omega, \beta) \frac{t^{(2\omega-1)(1-(\beta-\varepsilon))} \cdot \tau_1^{-(2\omega-1)-(\beta-\varepsilon)}}{(t - \tau_1)^{1-(\beta-\varepsilon)}}, \quad 0 < \varepsilon < \beta \quad (2.6.2)$$

$$\mu_{1h}^{(0)}(t) = C \cdot \exp \left(-\frac{p_0(\beta)}{(2\omega - 1)t^{2\omega-1}} \right), \quad p_0(\beta) > 0.$$

2.7 Сипаттамалық теңдеудің шешімімен (2.4.1) интегралдық теңдеуді регуляризациялау

Біздің мақсатымыз – бастапқы (2.4.1) интегралдық теңдеуді шешу. Оны келесі түрде жазайық:

$$\mu_1(t) - \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^3 P_{i\omega}(t, \tau) \right\} \mu_1(\tau) d\tau = f_1(t), \quad (2.7.1)$$

$$P_{3\omega}(t, \tau) = N_{3\omega}(t, \tau) \cdot e^{-Q_\omega(t, \tau)}.$$

Бұл теңдеуді сипаттамалық теңдеудің шешімі арқылы регуляризациялайық:

$$\begin{aligned} & \mu_1(t) - \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^2 P_{ih}(t, \tau) \right\} \mu_1(\tau) d\tau = \\ & = f(t) + \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^2 [P_{i\omega}(t, \tau) - P_{ih}(t, \tau)] + P_{3\omega}(t, \tau) \right\} \mu_1(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Оң жағы белгілі деп есептеп, оның шешімін жазамыз және жаңа интегралдық теңдеу аламыз

$$\mathbb{K}_r \mu_1 \equiv \mu_1(t) - \int_0^t K(t, \tau) \mu_1(\tau) d\tau = f_{1r}(t), \quad (2.7.2)$$

мұнда

$$\begin{aligned} K(t, \tau) &= \sum_{i=1}^2 [P_{i\omega}(t, \tau) - P_{ih}(t, \tau)] + P_{3\omega}(t, \tau) + \\ &+ \int_\tau^t R_h(t, \tau_1) \left\{ \sum_{i=1}^2 [P_{i\omega}(\tau_1, \tau) - P_{ih}(\tau_1, \tau)] + P_{3\omega}(\tau_1, \tau) \right\} d\tau_1, \\ f_{1r}(t) &= \int_0^t R_h(t, \tau_1) f_1(\tau_1) d\tau_1 + f_1(t) + C \mu_{1h}^{(0)}(t), \end{aligned}$$

$R_h(t, \tau_1)$ резольвентаның келесі бағалауы болады:

$$R_h(t, \tau_1) \leq C_1(\omega, \beta, \gamma) \frac{t^{(2\omega-1)(1-\beta+\varepsilon)} \cdot \tau_1^{-(2\omega-1)-(\beta-\varepsilon)}}{(t - \tau_1)^{1-\beta+\varepsilon}}$$

мұнда $0 < \varepsilon < \beta$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

(2.7.1) интегралдық теңдеуді тізбектеп жуықтау әдісімен шешуге болатынын көрсету керек. Ол үшін оның $K(t, \tau)$ ядросын бағалау керек.

2.7.1 Реттелген теңдеудің резольвентасы мен ядросын бағалау

Лемма 2.7.1.1. *Регуляризацияланған теңдеудің ядросына келесі бағалау беріледі:*

$$|K(t, \tau)| \leq C_1(\omega, \beta, \gamma) \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^{(2\omega-1)(1-\beta+\varepsilon)} \cdot \frac{B(2\varepsilon\omega, 1-\varepsilon)}{(t-\tau)^\varepsilon \cdot \tau^{1-2\varepsilon\omega}}.$$

мұнда $B(a, b)$ – Бета функция, $0 < \varepsilon < \beta$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

Дәлелдеуі. Алдымен $R_h(t, \tau_1)$ резольвентасын бағалайық. Бұл жерде α параметрі әзірге белгісіз және оны анықтау қажет.

$$\begin{aligned} R_h(t, \tau_1) &\leq (2\omega - 1)^{\frac{1}{2}+\alpha} \cdot C(\alpha, \gamma) \frac{t^{\omega-\frac{1}{2}}}{(t^{2\omega-1} - \tau_1^{2\omega-1})^{\frac{1}{2}} \cdot \tau_1^{\omega+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{t^{(2\omega-1)\alpha} \cdot \tau_1^{(2\omega-1)\alpha}}{(t^{2\omega-1} - \tau_1^{2\omega-1})^\alpha} = \\ &= \|e^{-rx} < C(\alpha, \gamma) \cdot x^{-\alpha}\| = \\ &= (2\omega - 1)^{\frac{1}{2}+\alpha} \cdot C(\alpha, \gamma) \frac{t^{(\omega-\frac{1}{2})(2\alpha+1)} \cdot \tau_1^{(2\omega-1)\alpha-\omega-\frac{1}{2}}}{(t^{2\omega-1} - \tau_1^{2\omega-1})^{\frac{1}{2}+\alpha}} \leq \\ &\leq \|ry^{r-1}(x-y) < x^r - y^r < rx^{r-1}(x-y)\| \\ &\leq C(\alpha, \gamma) \frac{t^{(\omega-\frac{1}{2})(2\alpha+1)} \cdot \tau_1^{(2\omega-1)\alpha-\omega-\frac{1}{2}}}{\tau_1^{(2\omega-2)(\frac{1}{2}+\alpha)} \cdot (t-\tau_1)^{\frac{1}{2}+\alpha}} = \\ &= \left\| \begin{array}{l} \text{дәреже} \quad \tau_1: (2\omega - 1)\alpha - \omega - \frac{1}{2} - (2\omega - 2)\alpha - \omega + 1 = \\ = \alpha[2\omega - 1 - 2\omega + 2] - 2\omega + \frac{1}{2} = -2\omega + \alpha + \frac{1}{2} \end{array} \right\| = \\ &= C_1(\omega, \beta, \gamma) \frac{t^{(2\omega-1)(\alpha+\frac{1}{2})} \cdot \tau_1^{-(2\omega-1)-(\frac{1}{2}-\alpha)}}{(t-\tau_1)^{\frac{1}{2}+\alpha}} \end{aligned}$$

Енді 1.5.1-1.5.3 леммалардың нәтижелерін қолдана отырып реттелген теңдеудің ядросын бағалайық:

$$\int_{\tau}^t R_h(t, \tau_1) \cdot \sum_{i=1}^2 |N_{i\omega}(\tau_1, \tau) - N_{ih}(\tau_1, \tau)| d\tau_1 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_3(\omega, \beta, \gamma) \cdot t^{(2\omega-1)(\alpha+\frac{1}{2})} \cdot \tau^{\beta\omega-\omega} \cdot \int_{\tau}^t \frac{\tau_1^{-(2\omega-1)-(\frac{1}{2}-\alpha)} \cdot \tau_1^{\beta\omega-1+\omega}}{(t-\tau_1)^{\alpha+\frac{1}{2}} \cdot (\tau_1-\tau)^{\beta}} d\tau_1 = \\
&= \left\| \left\| \begin{aligned} \frac{\tau_1-\tau}{t-\tau} = z; \quad \tau_1 = \tau + (t-\tau)z; \quad \tau_1-\tau = (t-\tau)z; \\ t-\tau_1 = (t-\tau)(1-z); \quad d\tau_1 = (t-\tau)dz. \end{aligned} \right\| \right\| = \\
&= C_3(\omega, \beta, \gamma) \cdot t^{(2\omega-1)(\alpha+\frac{1}{2})} \cdot \tau^{\beta\omega} \\
&\quad \cdot \int_0^1 \frac{[\tau + (t-\tau)z]^{-(2\omega-1)-(\frac{1}{2}-\alpha)+\beta\omega-1+\omega} \cdot (t-\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+\frac{1}{2}} \cdot (t-\tau)^{\beta} \cdot z^{\beta} (1-z)^{\alpha+\frac{1}{2}}} dz = \\
&= C_3(\omega, \beta, \gamma) \cdot \frac{t^{(2\omega-1)(\alpha+\frac{1}{2})} \cdot \tau^{\beta\omega-\omega}}{(t-\tau)^{\alpha+\beta-\frac{1}{2}}} \cdot \int_0^1 \frac{[\tau + (t-\tau)z]^{\rho}}{z^{\beta} (1-z)^{\alpha+\frac{1}{2}}} dz \leq \\
&\leq \left\| \rho = -(2\omega-1) - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + \beta\omega - 1 + \omega \right\| \leq \\
&\leq C_3(\omega, \beta, \gamma) \cdot \frac{t^{(2\omega-1)(\alpha+\frac{1}{2})}}{\tau^{(2\omega-1)(\alpha+\frac{1}{2})}} \cdot \frac{B\left(1-\beta; \frac{1}{2}-\alpha\right)}{(t-\tau)^{\alpha+\beta-\frac{1}{2}} \cdot \tau^{\omega[1-2(\alpha+\beta)]+1}}.
\end{aligned}$$

Бұл өрнектің әлсіз ерекшелікке ие болуы үшін $\alpha = \frac{1}{2} - (\beta - \varepsilon)$ болуы керек, мұндағы $0 < \varepsilon < \beta$.

Онда

$$|K(t, \tau)| \leq C_1(\omega, \beta, \gamma) \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^{(2\omega-1)(1-\beta+\varepsilon)} \cdot \frac{B(2\varepsilon\omega, 1-\varepsilon)}{(t-\tau)^{\varepsilon} \cdot \tau^{1-2\varepsilon\omega}}.$$

Келесі қосылғышты бағалау қалды:

$$\int_{\tau}^t R_h(t, \tau_1) \cdot N_{3\omega}(\tau_1, \tau) d\tau_1$$

Ол да әлсіз ерекшелікке ие екендігін көрсету керек. Бұл жағдайда $N_{3\omega}(\tau_1, \tau)$ үшін келесі бағалауды ескеретін боламыз:

$$\begin{aligned}
N_{3\omega}(\tau_1, \tau) &= \frac{\tau_1^{\omega}(\tau_1^{\omega} - \tau^{\omega})}{2a^2(\tau_1 - \tau)^2} e^{\frac{\tau_1^{\omega} \cdot \tau^{\omega}}{2a^2(\tau_1 - \tau)}} \cdot I_{\beta} \left(\frac{\tau_1^{\omega} \tau^{\omega}}{2a^2(\tau_1 - \tau)} \right) \leq \\
&\leq \frac{D_0\omega}{2a^2} \cdot \frac{\tau_1^{2\omega-1}}{\tau_1 - \tau} \cdot \frac{a\sqrt{2}(\tau_1 - \tau)^{\frac{1}{2}}}{\tau_1^{\frac{\omega}{2}} \cdot \tau^{\frac{\omega}{2}}} = \frac{D_0\omega}{a\sqrt{2}} \cdot \frac{\tau_1^{\frac{3}{2}\omega-1}}{(\tau_1 - \tau)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau^{\frac{\omega}{2}}}.
\end{aligned}$$

Онда

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^t R_{\omega}(t, \tau_1) \cdot N_{3\omega}(\tau_1, \tau) d\tau_1 \leq \\ & \leq \frac{C_3(\beta, \omega) \cdot D_0 \omega}{a\sqrt{2}} \cdot \frac{t^{(2\omega-1)(\alpha+\frac{1}{2})}}{\tau^{\frac{\omega}{2}}} \cdot \int_{\tau}^t \frac{\tau_1^{\frac{3}{2}\omega-1} \cdot \tau_1^{-(2\omega-1)-(\frac{1}{2}-\alpha)}}{(t-\tau_1)^{\frac{1}{2}+\alpha} (\tau_1-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau_1 \end{aligned}$$

Берілген интегралда айнымалыны алмастыру жасаймыз:

$$\left\| \begin{aligned} z &= \frac{\tau_1 - \tau}{t - \tau}; \quad \tau_1 = \tau + (t - \tau)z; \quad t - \tau_1 = (t - \tau)(1 - z); \\ \tau_1 - \tau &= (t - \tau)z; \quad d\tau_1 = (t - \tau)dz. \end{aligned} \right\|$$

Онда:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^t R_{\omega}(t, \tau_1) \cdot N_{3\omega}(\tau_1, \tau) d\tau_1 \leq \frac{C_3(\beta, \omega) \cdot D_0 \omega}{a\sqrt{2}} \cdot \frac{t^{(2\omega-1)(\alpha+\frac{1}{2})}}{\tau^{\frac{\omega}{2}}} \cdot \\ & \cdot \int_0^1 \frac{(t - \tau) \cdot [\tau + (t - \tau)z]^{(\frac{3}{2}\omega-1)-(2\omega-1)-(\frac{1}{2}-\alpha)} \tau_1^{-(2\omega-1)-(\frac{1}{2}-\alpha)}}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}+\alpha} (1 - z)^{\frac{1}{2}+\alpha} (t - \tau)^{\frac{1}{2}} \cdot z^{\frac{1}{2}}} dz = \\ & = C_4 \frac{t^{(2\omega-1)(\alpha+\frac{1}{2})}}{\tau^{\frac{\omega}{2}} (t - \tau)^2} \int_0^1 \frac{1}{z^{\frac{1}{2}} (1 - z)^{\frac{1}{2}+\alpha}} \cdot \frac{dz}{[\tau + (t - \tau)z]^{\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}-\alpha}} \leq \\ & \leq C_4 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{(2\omega-1)(\alpha+\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{(t - \tau)^2} \cdot \frac{1}{\tau^{1-2\omega\alpha}} \cdot \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}} (1 - z)^{\frac{1}{2}-\alpha} dz = \\ & = C_4 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{(2\omega-1)(\alpha+\frac{1}{2})} \cdot \frac{\tau^{(2\omega-1)\alpha}}{(t - \tau)^{\alpha} \cdot \tau^{1-\alpha}} \cdot B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \leq \\ & \leq C_4 \cdot B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{(2\omega-1)(\alpha+\frac{1}{2})} \cdot \frac{\tau^{(2\omega-1)\alpha}}{(t - \tau)^{\alpha} \cdot \tau^{1-\alpha}}, \end{aligned}$$

мұнда $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right)$ – Бета – функция және $\alpha = \frac{1}{2} - (\beta - \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \beta$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$. Онда:

$$|K(t, \tau)| \leq C_1(\omega, \beta, \gamma) \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^{(2\omega-1)(1-\beta+\varepsilon)} \cdot \frac{B(2\varepsilon\omega, 1 - \varepsilon)}{(t - \tau)^{\varepsilon} \cdot \tau^{1-2\varepsilon\omega}}.$$

Ескерту 2.7.1.1. (2.7.1) қатынасынан

$$\mu_1(t) - \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^3 N_{i\omega}(t, \tau) \right\} \mu_1(\tau) d\tau = 0$$

біртекті теңдеуі келесі біртексіз теңдеуге тең:

$$\mathbb{K}_r \mu_1 = \mu_1(t) - \int_0^t K(t, \tau) \mu_1(\tau) d\tau = C \mu_{1h}^{(0)}(t),$$

оның әрбір C үшін жалғыз шешімі болады, оны $\tilde{\mu}_1^{(0)}(t)$ деп белгілейік.

Осылайша, келесі теореманың әділдігі дәлелденді.

Теорема 2.7.1.1. $0 < \beta < \frac{1}{2}$ болғанда (2.7.1) біртексіз интегралдық теңдеудің жалпы шешімі төмендегі функция болады:

$$\mu_1(t) = [\mathbb{K}_r]^{-1} f(t) + C \cdot \tilde{\mu}_1^{(0)}(t), \quad C = \text{const},$$

мұнда

$$\mu_1(t) \in M(0, +\infty), \quad M(0, +\infty) = L_\infty(0, +\infty) \cap C(0, +\infty).$$

Ал $\frac{1}{2} < \beta < 1$ болғанда оның жалғыз шешімі болады, яғни $C = 0$.

Осылайша, (2.7.2)-ні ескере отырып,

$$t^{-\alpha+\omega(1-\beta)} \cdot e^{\frac{(2\omega-1)t^{2\omega-1}}{4a^2}} \cdot \mu(t) \in L_\infty(0, \infty)$$

функциялар класында (2.3.1) бастапқы интегралдық теңдеуінің шешімі табылды.

2.8 (2.1.3)-(2.1.5) шеттік есептің шешімі

Теорема 2.8.1. Айталық $g_1(t) \in M(0, +\infty)$, $t^{\omega(1-\beta)} g_2(t) \in M(0, +\infty)$, $M(0, +\infty) = L_\infty(0, +\infty) \cap C(0, +\infty)$ шарттары орындалады делік, онда (2.1.3)-(2.1.5) шеттік есебінің шешімі

$$u(r, t) = \int_0^t \frac{\partial G(r, \xi, t - \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\tau^\omega} \mu(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial G(r, \xi, t - \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} v(\tau) d\tau,$$

мұнда

$$G(r, \xi, t - \tau) = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta \cdot \xi^{1-\beta}}{t - \tau} \cdot \exp \left[-\frac{r^2 + \xi^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \cdot I_\beta \left(\frac{r\xi}{2a^2(t - \tau)} \right),$$

$$v(t) = 2a^2 \beta g_1(t),$$

ал $\mu(t)$ келесі псевдо-Вольтерра интегралдық теңдеуінен анықталады:

$$\mu(t) - \int_0^t N(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f(t), \quad (2.8.1)$$

мұнда

$$N(t, \tau) = \frac{t^{\omega\beta} \tau^{\omega(1-\beta)} (t^\omega - \tau^\omega)}{2a^2(t - \tau)^2} \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right]$$

$$\cdot I_\beta \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right) +$$

$$+ \frac{t^{\omega(\beta+1)} \tau^{\omega(1-\beta)}}{2a^2(t - \tau)^2} \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right] \cdot I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right) +$$

$$+ \frac{t^{\omega\beta} (1 - 2\beta)}{(t - \tau) \tau^{\omega\beta}} \exp \left[-\frac{(t^\omega - \tau^\omega)^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \exp \left[-\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right] \cdot I_\beta \left(\frac{t^\omega \tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right),$$

$$I_{\beta-1, \beta}(z) = I_{\beta-1}(z) - I_\beta(z),$$

$$f(t) = -2a^2 g_2(t) + 2a^2 \widetilde{g}_1(t^\omega, t),$$

$$\widetilde{g}_1(r, t) = \frac{1}{(2a^2)^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{r^{2\beta}}{(t - \tau)^{\beta+1}} \cdot \exp \left[-\frac{r^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \cdot g_1(t) d\tau,$$

$I_\beta(z)$ – β ретті Бессельдің модифицирленген функциясы.

Дәлелдеуі. (2.1.3)-(2.1.5) шеттік есептің (2.3.1)-ші интегралдық түрінен алатынымыз:

$$u(r, t) = \sum_{i=1}^4 u_i(r, t),$$

мұнда

$$u_1(r, t) = \int_0^t \frac{r^\beta \tau^{\omega(1-\beta)} (r - \tau^\omega)}{4a^4(t - \tau)^2} e^{-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}} I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right) \mu(\tau) d\tau,$$

$$u_2(r, t) = \int_0^t \frac{r^{\beta+1} \tau^{\omega(1-\beta)}}{4a^4(t - \tau)^2} e^{-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}} I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right) \mu(\tau) d\tau,$$

$$u_3(r, t) = \int_0^t \frac{r^\beta (1 - 2\beta)}{2a^2(t - \tau)\tau^{\omega\beta}} e^{-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}} I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right) \mu(\tau) d\tau,$$

$$u_4(r, t) = \frac{1}{(2a^2)^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{r^{2\beta}}{(t - \tau)^{\beta+1}} \cdot \exp \left[-\frac{r^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \cdot g_1(t) d\tau.$$

$u(r, t) \in M(0, +\infty)$ болатындай $t^{-\alpha-\omega\beta} \cdot e^{-\frac{(2\omega-1)t^{2\omega-1}}{4a^2}} \cdot \mu(t) \in L_\infty(0; +\infty)$ деп болжайық, мұнда $\alpha = (2\omega - 1)(1 - \beta + \varepsilon) > 0$.

Бірінші қосылғышты бағалайық:

$$\begin{aligned} u_1(r, t) &= \int_0^t \frac{r^\beta \tau^{\omega(1-\beta)} (r - \tau^\omega) \tau^{\alpha+\omega\beta}}{4a^4(t - \tau)^2} e^{-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{(2\omega-1)\tau^{2\omega-1}}{4a^2}} e^{-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}} I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right) \times \\ &\quad \times \left\{ \tau^{-\alpha-\omega\beta} \cdot e^{-\frac{(2\omega-1)\tau^{2\omega-1}}{4a^2}} \cdot \mu(\tau) \right\} d\tau = \\ &= \left\| e^{-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}} \leq 1, \quad e^{-\frac{(2\omega-1)\tau^{2\omega-1}}{4a^2}} \leq 1 \right\| \leq \\ &\leq C_1 \int_0^t \frac{r^\beta \tau^{\omega+\alpha} (r - \tau^\omega)}{4a^4(t - \tau)^2} e^{-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}} I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right) d\tau = \\ &= \left\| \frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} = z \Rightarrow dz = \frac{2a^2 r (\omega \tau^{\omega-1} (t - \tau) + \tau^\omega)}{4a^4(t - \tau)^2} \right\| = \\ &= C_1 \int_0^\infty \frac{r^\beta \tau^{\omega+\alpha} (r - \tau^\omega)}{4a^4(t - \tau)^2} \cdot \frac{4a^4(t - \tau)^2}{2a^2 r (\omega \tau^{\omega-1} (t - \tau) + \tau^\omega)} \cdot \frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \cdot \frac{1}{z} e^{-z} I_\beta(z) dz = \\ &= \left\| r < t^\omega, \quad \tau < t, \quad \frac{\tau^\omega}{\omega \tau^{\omega-1} (t - \tau) + \tau^\omega} \leq 1 \right\| \leq \\ &\leq \frac{C_1}{4a^4} t^{\omega\beta} \int_0^\infty \frac{\tau^{\omega+\alpha} (t^\omega - \tau^\omega)}{t - \tau} \cdot \frac{1}{z} e^{-z} I_\beta(z) dz = \mathbb{I}^{(1)}(r, t). \end{aligned}$$

Айталық $\omega > 1$, оларға $t^\omega - \tau^\omega < \omega t^{\omega-1}(t - \tau)$ теңсіздігі орындалады. Онда:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}^{(1)}(r, t) &\leq \frac{C_1}{4a^4} t^{\omega\beta} \int_0^\infty \frac{\tau^{\omega+\alpha} \omega t^{\omega-1} (t - \tau)}{t - \tau} \cdot \frac{1}{z} e^{-z} I_\beta(z) dz = \|\tau < t\| \leq \\ &\leq \frac{C_1 \omega}{4a^4} t^{\omega\beta+\alpha+2\omega-1} \int_0^\infty \frac{1}{z} e^{-z} I_\beta(z) dz = \frac{C_1 \omega}{4a^4} t^{\omega\beta+\alpha+2\omega-1} \leq \widetilde{C}_1(a, T, \omega). \end{aligned}$$

Айталық $\frac{1}{2} < \omega < 1$, оларға $t^\omega - \tau^\omega < \omega\tau^{\omega-1}(t - \tau)$ теңсіздігі орындалады. Онда:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}^{(1)}(r, t) &\leq \frac{C_1}{4a^4} t^{\omega\beta} \int_0^\infty \frac{\tau^{\omega+\alpha} \omega \tau^{\omega-1} (t - \tau)}{t - \tau} \cdot \frac{1}{z} e^{-z} I_\beta(z) dz = \\
&= \frac{C_1 \omega}{4a^4} t^{\omega\beta} \int_0^\infty \tau^{\alpha+2\omega-1} \cdot \frac{1}{z} e^{-z} I_\beta(z) dz = \left\| \begin{array}{l} 2\omega - 1 > 0 \text{ при } \frac{1}{2} < \omega < 1 \\ \tau < t \end{array} \right\| \leq \\
&\leq \frac{C_1 \omega}{4a^4} t^{\omega\beta+\alpha+2\omega-1} \int_0^\infty \frac{1}{z} e^{-z} I_\beta(z) dz = \frac{C_1 \omega}{4a^4} t^{\omega\beta+\alpha+2\omega-1} \leq \widetilde{C}_1(a, T, \omega), \\
&\quad \forall (r, t) \in G.
\end{aligned}$$

Екінші қосылғышты бағалайық:

$$\begin{aligned}
u_2(r, t) &= \int_0^t \frac{r^{\beta+1} \tau^{\omega(1-\beta)} \tau^{\alpha+\omega\beta}}{4a^4(t-\tau)^2} e^{-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{(2\omega-1)\tau^{2\omega-1}}{4a^2}} e^{-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}} I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right) \\
&\quad \times \\
&\quad \times \left\{ \tau^{-\alpha-\omega\beta} \cdot e^{\frac{(2\omega-1)\tau^{2\omega-1}}{4a^2}} \cdot \mu(\tau) \right\} d\tau = \\
&= \left\| e^{-\frac{(r-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}} \leq 1, \quad e^{-\frac{\tau}{4a^2}} \leq 1 \right\| \leq \\
&\leq C_2 \int_0^t \frac{r^{\beta+1} \tau^{\omega+\alpha}}{4a^4(t-\tau)^2} e^{-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)}} I_{\beta-1, \beta} \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} \right) d\tau = \\
&= \left\| \frac{r\tau^\omega}{2a^2(t-\tau)} = z \Rightarrow dz = \frac{2a^2 r (\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega)}{4a^4(t-\tau)^2} \right\| = \\
&= C_2 \int_0^\infty \frac{r^{\beta+1} \tau^\alpha}{4a^4(t-\tau)^2} \cdot \frac{4a^4(t-\tau)^2}{2a^2 r} \cdot \frac{\tau^\omega}{\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega} \cdot e^{-z} I_{\beta-1, \beta}(z) dz = \\
&= \left\| r < t^\omega, \quad \frac{\tau^\omega}{\omega\tau^{\omega-1}(t-\tau) + \tau^\omega} \leq 1 \right\| \leq \\
&\leq \frac{C_2}{2a^2} t^{\omega\beta+\alpha} \int_0^\infty e^{-z} I_{\beta-1, \beta}(z) dz = \frac{C_2}{2a^2} t^{\omega\beta+\alpha} \leq \widetilde{C}_2(a, T), \quad \forall (r, t) \in G.
\end{aligned}$$

Үшінші қосылғышты бағалайық:

$$\begin{aligned}
u_3(r, t) &= \int_0^t \frac{r^\beta (1 - 2\beta) \tau^{\alpha + \omega \beta}}{2a^2(t - \tau) \tau^{\omega \beta}} e^{-\frac{(r - \tau^\omega)^2}{4a^2(t - \tau)}} e^{-\frac{(2\omega - 1)\tau^{2\omega - 1}}{4a^2}} e^{-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)}} I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right) \times \\
&\quad \times \left\{ \tau^{-\alpha - \omega \beta} \cdot e^{\frac{(2\omega - 1)\tau^{2\omega - 1}}{4a^2}} \cdot \mu(\tau) \right\} d\tau = \\
&= \left\| e^{-\frac{(r - \tau^\omega)^2}{4a^2(t - \tau)}} \leq 1, \quad e^{-\frac{\tau}{4a^2}} \leq 1 \right\| \leq \\
&\leq C_3 \int_0^t \frac{r^\beta (1 - 2\beta) \tau^\alpha}{2a^2(t - \tau)} e^{-\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)}} I_\beta \left(\frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \right) d\tau = \\
&= \left\| \frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} = z \Rightarrow dz = \frac{2a^2 r (\omega \tau^{\omega - 1} (t - \tau) + \tau^\omega)}{4a^4(t - \tau)^2} \right\| = \\
&= C_3 \int_0^\infty \frac{r^\beta (1 - 2\beta) \tau^\alpha}{2a^2(t - \tau)} \cdot \frac{4a^4(t - \tau)^2}{2a^2 r (\omega \tau^{\omega - 1} (t - \tau) + \tau^\omega)} \cdot \frac{r\tau^\omega}{2a^2(t - \tau)} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-z} I_\beta(z) dz = \\
&= \left\| r < t^\omega, \quad \tau < t, \quad \frac{\tau^\omega}{\omega \tau^{\omega - 1} (t - \tau) + \tau^\omega} \leq 1 \right\| \leq \\
&\leq \frac{C_3(1 - 2\beta)}{2a^2} t^{\omega \beta + \alpha} \int_0^\infty \frac{1}{z} \cdot e^{-z} I_\beta(z) dz = \frac{C_3(1 - 2\beta)}{2a^2} t^{\omega \beta + \alpha} \leq \widetilde{C}_3(a, T, \beta), \quad \forall(r, t) \\
&\in G.
\end{aligned}$$

Төртінші қосылғышты бағалайық:

$$\begin{aligned}
u_4(r, t) &= \frac{1}{(2a^2)^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{r^{2\beta}}{(t - \tau)^{\beta + 1}} \cdot \exp \left[-\frac{r^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \cdot g_1(t) d\tau \leq \\
&\leq \frac{1}{(2a^2)^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot |g_1(t)| \int_0^t \frac{r^{2\beta}}{(t - \tau)^{\beta + 1}} \cdot \exp \left[-\frac{r^2}{4a^2(t - \tau)} \right] d\tau = \\
&= \left\| \frac{r^2}{4a^2(t - \tau)} = z; \quad t - \tau = \frac{r^2}{4a^2 z}; \quad d\tau = \frac{r^2}{4a^2 z^2} dz \right\| = \\
&= \frac{1}{(2a^2)^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot |g_1(t)| \int_{\frac{r^2}{4a^2 t}}^\infty \frac{r^{2\beta} \cdot 4^{\beta + 1} \cdot a^{2\beta + 2} \cdot z^{\beta + 1}}{r^{2\beta + 2}} \cdot \frac{r^2}{4a^2 z^2} \cdot e^{-z} dz = \\
&= \frac{1}{(2a^2)^\beta} \cdot \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot 4^\beta \cdot a^{2\beta} \cdot |g_1(t)| \int_{\frac{r^2}{4a^2 t}}^\infty z^{\beta - 1} \cdot e^{-z} dz = \\
&= |g_1(t)| \cdot \frac{\Gamma \left(\beta, \frac{r^2}{4a^2 t} \right)}{\Gamma(\beta)} < |g_1(t)|, \quad \forall(r, t) \in G.
\end{aligned}$$

Осыдан жұмыстың негізгі нәтижесі болып табылатын 2.8.1 теоремасының дұрыстығы шығады.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыста уақыттың бастапқы сәтінде болмайтын, яғни нүктеге дейін жойылатын жылжымалы шекарасы бар облыстағы жылу өткізгіштік теңдеуінің шеттік есептері қарастырылады. Бастапқы есептер келтірілетін псевдо-Вольтеррлік интегралдық теңдеулердің шешілу мәселелері зерттелді. Кейбір жағдайларда сәйкес біртекті псевдо-Вольтерр интегралдық теңдеулердің нөлдік емес шешімдері бар екендігі көрсетілген. Алынған псевдо-Вольтерр интегралдық теңдеулерді шешу үшін регуляризация әдісі қолданылған.

Қозғалмалы шекарада уақыттың бастапқы сәтінде нүктеге дейін жойылатын облыстардағы параболалық теңдеу үшін шеттік есептердің шешілу мәселелеріне қатысты негізгі нәтижелер:

- 1) уақыттың бастапқы сәтінде жойылатын қозғалмалы шекаралары бар облыстардағы жылу өткізгіштік теңдеулері үшін жаңа шеттік есептер қойылды;
- 2) берілген функциялар мен есептер шешімдерінің кеңістігі анықталды;
- 3) бастапқы есептерді түрлендіру орындалды;
- 4) шеттік есептерді Вольтерр типті сингулярлық интегралдық теңдеуге келтіру жүргізілді;
- 5) интегралдық теңдеулердің шешілуі туралы теоремалар дәлелденді, олардың резольвенталары құрылып, бағалау жүргізілді;
- 6) бастапқы шеттік есептердің шешілуі туралы теоремалар дәлелденді.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 Gevrey M. Les equations paraboliques // J. de Math. –1913. – Vol. 9. – P. 187-325.
- 2 Browne A. Sur un problem d'iversion pose par Abel et sursesgeneralisations // Annales de la faculte des sciencesde Toulouse. – 1912. – Vol. 4. – P. 63-198.
- 3 Holmgren E. Sur l'equationd'Abel // Arkiv for matematik, astronomiochfysik. – 1992. – Bd. 16. – P. 121-128.
- 4 Петровский И.Г. О решении первой краевой задачи для уравнения теплопроводности // Уч. записки МГУ. – 1934. – Вып. 2. – С. 55-59.
- 5 Михайлов В.П. О задаче Дирихле и первой смешанной задаче для параболического уравнения // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 140, №2. – С. 303-306.
- 6 Михайлов В.П. О задаче Дирихле для параболического уравнения // Мат. сборник. – 1963. – Т. 61(103), №1. – С. 40-64.
- 7 Крейн С.Г., Лаптев Г.И. Абстрактная схема рассмотрения параболических задач в нецилиндрических областях // Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т. 5, №8. – С. 1458-1469.
- 8 Ушаков В.И. Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области // Мат. сборник. – 1980. – Т. 111, №1. – С. 95-115.
- 9 Алиев Р.Д. Обобщенная задача Пуанкаре (Неймана) для параболических уравнений в нецилиндрических областях с негладкой границей // Докл. АН АзССР. – 1984. – Т. 40, №12. – С. 12-16.
- 10 Алиев Р.Д. Разрешимость обобщенной задачи Пуанкаре параболических уравнений в нецилиндрических областях с негладкой границей // Дифференциальные уравнения. – 1986. – Т. 22, №11. – С. 1991-19941.
- 11 Алиев Р.Д. Единственность решения обобщенной задачи Пуанкаре параболических уравнений в нецилиндрических областях с негладкой границей // Дифференциальные уравнения. – 1986. – Т. 22, №12. – С. 2171-2173.
- 12 Курта В.В. О проблеме Тихонова-Петровского для параболических уравнений второго порядка в нецилиндрических областях // Изв. вузов. Мат. – 1992. – №10. – С. 87-88.
- 13 Курта В.В., Шишков А.Е. О классах единственности решений граничных задач для недивергентных параболических уравнений второго порядка в нецилиндрических областях // Докл. АН УССР.– 1990. – №1. – С. 28-30.
- 14 Орынбасаров М.О. О разрешимости краевых задач для параболического и полипараболического уравнений в нецилиндрической области с негладкими боковыми границами // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30, №1. – С. 151-161.

15 Алхутов Ю.А. Поведение решений параболических уравнений второго порядка в нецилиндрических областях // Докл. РАН. – 1995. – Т. 345, №5. – С. 583-585.

16 Карташов Э.М. Метод функций Грина при решении краевых задач для уравнений параболического типа в нецилиндрических областях // Докл. РАН. – 1996. – Т. 351, №1. – С. 32-36.

17 Карташов Э.М. Новые интегральные соотношения для аналитических решений уравнений параболического типа в нецилиндрических областях // Докл. РАН. – 2000. – Т. 374, №2. – С. 168-172.

18 Dal Passo R., Ughi M. On the Dirichlet problem for a class of nonlinear degenerate parabolic equations in non-cylindrical domains // C. R. Acad. Sci. – 1989. – №19. – P. 555-558.

19 Камынин Л.И. О решении краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 139. – С. 1048-1051.

20 Камынин Л.И. Метод тепловых потенциалов для параболического уравнения с разрывными коэффициентами // Сиб. Мат. Журн. – 1963. – Т. 4. – С. 1071-1106.

21 Камынин Л.И. О решении IV и V краевых задач для одномерного параболического уравнения 2-го порядка в криволинейной области // Журн. вычисл. Математики и мат. физики. – 1969. – Т. 9. – С. 558-572.

22 Михайлов В.П. О задаче Дирихле для параболического уравнения // Мат. сб. – 1963. – Т. 61. – С. 40-64; Т. 62. – С. 140-159.

23 Михайлов В.П. Теорема существования и единственности решения одной граничной задачи для параболического уравнения в области с особыми точками на границе // Тр. матем. Ин-та АН СССР. – 1967. – Т. 91. – С. 47-58.

24 Антимиров М.Я., Геллер З.И. Решение тепловых задач при движении границы по закону \sqrt{t} // Инж. физ. журн. – 1964. – Т. 7. – С. 57-63.

25 Дубовис М.И. Плоская одномерная однофазная задача теплопроводности с подвижной границей // Исследования по теплопроводности: сб. – Минск: Наука. – 1967. – С. 318-325.

26 Редозубов Д.В. О линейных тепловых задачах с одной движущейся границей // Журн. технической физики. – 1957. – Т. 27, В. 9. – С. 2149-2157.

27 Гринберг Г.А. О решении задач диффузионного типа для расширяющихся и сжимающихся областей // ПММ. – 1969. – Т. 33. – С. 269-287.

28 Гринберг Г.А. О температурных или концентрационных полях, создаваемых внутри конечной или бесконечной области с движущимися поверхностями, на которых задан временной ход температуры или концентрации // ПММ. – 1966. – Т. 33. – С. 112-124.

29 Квальвассер В.И., Рутнер Я.Ф. Метод нахождения функции Грина краевых задач уравнений теплопроводности для отрезка прямой с равномерно движущимися границами // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 156. – С. 1273-1276.

30 Хольм Р. Электрические контакты / пер. с англ. – М., 1961. – 464 с.

- 31 Kharin S. Mathematical model of electrical contact bouncing // AIP Conference Proceedings. – 2015. – Vol. 1676. – P. 020019.
- 32 Kharin S.N., Nouri H., Miedzinski B. et al. Transient phenomena of arc to glow discharge transformation at contact opening // Proc. of 21st internat. conf. on Electric contacts. – Zurich, 2002. – P. 425-431.
- 33 Miedzinski B., Wisniewski G., Kharin S.N. et al. Arc-to-Glow Transition Approach for Practical Use in DC Low-Power // Low-Voltage Electric Grids, IEEE Trans. Compon. Packaging Manuf Technol. – 2018. – Vol. 8, №6. – P. 932-938.
- 34 Sarsengeldin M.M., Kharin S.N., Rayev Z. et al. Mathematical model of heat transfer in opening electrical contacts with tunnel effect // Filomat. – 2018. – Vol. 32. – P. 1003-1008.
- 35 Wisniewski G., Habrych M., Miedzinski B. Approach to prediction the transition of a small power low voltage switching arc into glowing // Proc. 20th internat. sympos. on Electrical Apparatus and Technologies (SIELA). – Bourgas, 2018. – P. 1-4.
- 36 Ким Е.И., Омельченко В.Г., Харин С.Н. Математические модели тепловых процессов в электрических контактах. – Алма-Ата, 1977. – 236 с.
- 37 Kavokin A.A., Kulakhmetova A.T., Shpadi Y.R. Application of thermal potentials to the solution of the problem of heat conduction in a region degenerates at the initial moment // Filomat. – 2018. – Vol. 32, №3. – P. 825-836.
- 38 Amangaliyeva M.M., Akhmanova D.M., Dzhenaliev M.T. et al. Boundary value problems for a spectrally loaded heat operator with load line approaching the time axis at zero or infinity // Differential Equations. – 2011. – №2. – P. 231-243.
- 39 Jenaliyev M., Amangaliyeva M., Kosmakova M. et al. On a Volterra equation of the second kind with “incompressible” kernel // Advances in Difference Equations. – 2015. – Vol. 2015, №1. – P. 71-1-71-14.
- 40 Amangaliyeva M.M., Dzhenaliev M.T., Kosmakova M.T. et al. On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain // Siberian Mathematical Journal. – 2015. – Vol. 56, №6. – P. 982-995.
- 41 Jenaliyev M., Ramazanov M. On a homogeneous parabolic problem in an infinite corner domain // Filomat. – 2018. – Vol. 32, №3. – P. 965-974.
- 42 Рамазанов М.И., Гульманов Н.К. О сингулярном интегральном уравнении Вольтерра краевой задачи теплопроводности в вырождающейся области // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2021. – Т.31, №2. – С. 241-252.
- 43 Ramazanov M.I., Jenaliyev M.T., Gulmanov N.K. Solution of the boundary value problem of heat conduction in a cone // Opuscula Mathematica. – 2022. – Vol. 42, №1. – P. 75-91.
- 44 Ramazanov M.I., Gulmanov N.K. Solution of a two-dimensional boundary value problem of heat conduction in a degenerating domain // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2021. – Vol. 111, №3. – P. 65-78.
- 45 Pskhu A.V., Ramazanov M.I., Gulmanov N.K. et al. Boundary value problem for fractional diffusion equation in a curvilinear angle domain // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. – 2022. – №1(105). – P. 83-95.

- 46 Ramazanov M.I., Kosmakova M.T., Tuleutaeva Z.M. On the Solvability of the Dirichlet Problem for the Heat Equation in a Degenerating Domain // Lobachevskii Journal of Mathematicsthis. – 2021. – Vol. 42. – P. 3715-3725.
- 47 Jenaliyev M.T., Assetov A.A., Yergaliyev M.G. On the Solvability of the Burgers Equation with Dynamic Boundary Conditions in a Degenerating Domain // Lobachevskii Journal of Mathematicsthis. – 2021. – Vol. 42. – P. 3661-3674.
- 48 Yuldashev T.K., Rakhmonov F.D. On a Benney-Luke Type Differential Equation with Nonlinear Boundary Value Conditions // Lobachevskii Journal of Mathematicsthis link is disabled. – 2021. – Vol. 42. – P. 3761-3772.
- 49 Zarifzoda S.K., Yuldashev T.K., Djumakhon I. Volterra-Type Integro-Differential Equations with Two-Point Singular Differential Operator // Lobachevskii Journal of Mathematicsthis. – 2021. – Vol. 42. – P. 3784-3792.
- 50 Yumagulov M.G., Ibragimova L.S., Belova A.S. First Approximation Formulas in the Problem of Perturbation of Definite and Indefinite Multipliers of Linear Hamiltonian Systems // Lobachevskii Journal of Mathematicsthis. – 2021. – Vol. 42. – P. 3773-3783.
- 51 Мищенко В.А. Тепловые режимы и надежность электрических аппаратов. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 272 с.
- 52 Кулагин Н.Ю., Лапин А.В. Тепловые процессы в электрических связях при коммутации // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2016. – №7(114). – С. 142-149.
- 53 Левин А.А. Теплофизика электрических приборов. – М.: Высшая школа, 1985. – 352 с.
- 54 Рамазанов М.И. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра // Изв. АН Каз ССР. – 1977. – № 3. – С. 49-55.
- 55 Ким Е.И., Рамазанов М.И. Об одном интегральном уравнении типа Вольтерра второго рода // Изв. АН Каз ССР. – 1980. – №1. – С. 42-48.
- 56 Омаров Т.Е., Отелбаев М.О. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра // Дифференциальные уравнения и их приложения: сб. – Алма-Ата, 1975. – С. 34-39.
- 57 Омаров Т.Е., Отелбаев М.О. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра // Математические исследования: сб. – Караганда, 1976. – Вып. 3. – С. 41-47.
- 58 Vaderko E.A. Parabolic problems and boundary integral equations // Mathematical methods in the applied sciences. – 1997. – Vol. 20. – P. 449-459.
- 59 Ким Е.И., Рамазанов М.И. Решение одного особого интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода // Изв. АН КазССР. – 1980. – №3. – С. 44-50.
- 60 Рамазанов М.И. К решению одного класса сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра // Вопросы математики и прикладной механики: сб. – Алма-Ата, 1977. – С. 88-92.
- 61 Рамазанов М.И. Об одном интегральном уравнении // Вопросы математики и прикладной механики: сб. – Алма-Ата, 1977. – С. 92-93.

62 Рамазанов М.И. Исследование собственных значений и собственных функций особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода // Дифференциальные уравнения и их приложения: сб. – Алма-Ата, 1979. – С. 121-127.

63 Рамазанов М.И. К вопросу о спектре одного класса особых интегральных уравнений Вольтерра // Уравнения с разрывными коэффициентами и их приложения: сб. – Алма-Ата, 1985. – С. 122-128.

64 Рамазанов М.И. Исследование спектра одного особого интегрального уравнения Вольтерра // Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений: сб. – Караганда, 1986. – С. 112-114.

65 Городничев С.П. и др. Математическая модель процессов сваривания электрических контактов при наличии вибрации // Известия ВУЗов. Серия электромеханика. – 1982. – №8. – С. 986-988.

66 Ramazanov M.I., Gulmanov N.K., Kopbalina S.S. Solution of a two-dimensional parabolic model problem in a degenerate angular domain // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2023. – №3(111). – P. 91-108.

67 Ramazanov M.I., Gulmanov N.K., Kopbalina S.S. et al. Solution of a Singular Integral Equation of Volterra Type of the Second Kind // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45. – P. 5898-5906.

68 Gulmanov N.K., Kopbalina S.S., Tanin A.O. Solution of the model problem of heat conduction with Bessel operator // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2025. – №1(117). – P. 71-80.

69 Рамазанов М.И., Гульманов Н.К., Копбалина С.С. О Псевдо-Вольтерровом интегральном уравнении // Матер. междунар. науч.-практ. конф. «Тенденция развития современной математики и ее обучения в условиях цифровизации образования». – Шымкент, 2023. – С. 94-97.

70 Рамазанов М.И., Гульманов Н.К., Копбалина С.С. К решению двумерной параболической задачи в вырождающейся области // Матер. междунар. науч.-практ. конф. «Анализ, дифференциальные уравнения и их приложения» посв. 100-лет. Т.И. Аманова. – Астана, 2023. – С. 102-103.

71 Ramazanov M.I., Gulmanov N.K., Kopbalina S.S. Solution of a parabolic problem in an evolving degenerate domain // Abstracts of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023). -Turkestan, 2023. – P. 92.

72 Рамазанов М.И., Гульманов Н.К., Копбалина С.С. Параболическое уравнение в неканонической вырождающейся области // Матер. 7-й междунар. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». – Нальчик, 2023. – С. 238.

73 Рамазанов М.И., Гульманов Н.К., Копбалина С.С. Параболическая задача в области, вырождающейся в точку по закону $x = t^\alpha, \alpha > \frac{1}{2}$ // Матер. традиц. междунар. апрел. математ. конф. в честь Дня науки Республики Казахстан. – Алматы, 2024. – С. 170-171.

74 Ramazanov M.I., Gulmanov N.K., Kopbalina S.S. Parabolic problem in a non-canonical domain degenerating to a point at the initial moment of time // Abstr.

of the 11th internat. conf. «Modern problems of mathematics and mechanics» dedic. T. Nasiraddin. – Baku, 2024. – P. 187-190.

75 Рамазанов М.И., Гульманов Н.К., Копбалина С.С. Решение граничной задачи теплопроводности в неканонической вырождающейся области // Матер. междунар. науч. конф. «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» посв. 90 лет. Т.Д. Джураева. – Ташкент, 2024. – С. 214.

76 Polianin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of integral equations. – Ed. 2nd. – NY., 2008. – 1144 p.

77 Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 467 с.

78 Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M., Table of Integrals, Series, and Products. – San Diego: Academic Press, 2014. – 1206 p.

79 Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.

80 Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – Изд. 4-е, перер. и доп. – М., 1973. – 749 с.

81 Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М., 2003. – Т. 2. – 688 с.

82 Ватсон Дж.Н. Теория бесселевых функций / пер. с англ. – М., 1949. – 800 с.

83 Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. Inequalities. – Cambridge, 1934. – 324 p.